

Un modelo de Gelfand para un grupo de Weyl de tipo D_{2n}

Autor: Prof. Mauro Natale

Director: Dr. José O. Araujo

Tesis de Maestría en Matemáticas

Presentada ante la Facultad de Ciencias Exactas

de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

19 de diciembre de 2011

Índice general

1. Representaciones de grupos	6
1.1. Representaciones lineales de grupos	6
1.2. G-módulos	8
1.3. Álgebra de grupo	10
1.4. Teorema de Maschke	11
1.5. Lema de Schur	13
1.6. El carácter de una representación	14
1.7. Relación de ortogonalidad	16
1.8. Representaciones restringidas a subgrupos	25
1.9. Representaciones inducidas	26
1.10. Indicador de Frobenius-Schür	29
2. Grupo de Reflexiones	32
2.1. Reflexión ortogonal	32
2.2. Sistemas de Raíces	33
2.3. Clasificación de los Sistemas de Coxeter	39
2.3.1. Grupos de Coxeter y Sistemas de Coxeter	39
2.3.2. Grupos de reflexiones y sistemas de Coxeter. Clasificación	43
2.4. Grupos de Weyl	47
2.5. Construcción de los grupos de Weyl Clásicos	50
2.5.1. Grupo de Weyl de tipo A_n	50
2.5.2. Grupo de Weyl de tipo B_n	53
2.5.3. Grupo de Weyl de tipo D_n	56
2.6. Polinomios invariantes	59

2.6.1.	Álgebra de invariantes	59
2.6.2.	Serie de Poincaré	61
2.6.3.	Grado falso	63
3.	Modelos de Gelfand	66
3.1.	El modelo por involuciones	68
3.1.1.	Definición del modelo	69
3.2.	El modelo polinomial	71
3.2.1.	El espacio \mathcal{N}_G	71
3.3.	El modelo polinomial en grupos de Coxeter	74
3.3.1.	Grupo de Weyl de tipo A_n	75
3.3.2.	Grupo de Weyl de tipo B_n	76
3.3.3.	Grupo de Weyl de tipo D_{2n+1}	78
4.	Modelo de Gelfand para un Grupo de Weyl de tipo D_{2n}	80
4.1.	Órbitas minimales	81
4.2.	Construcción del modelo	82

Introducción

La noción de grupo fue introducida por E. Galois hacia 1829, si bien ya estaba implícita en obras de Lagrange y Gauss, su importancia no fue reconocida durante un largo período, hasta que Felix Klein le dio un lugar fundamental en su interpretación de la geometría no euclídeana.

A fines del siglo XIX, la teoría de grupos finitos inicia un vigoroso desarrollo a través de los trabajos de Frobenius y Burnside, y posteriormente con los trabajos del Schur. En particular, el estudio de grupos generados por reflexiones ortogonales, podría remontarse a 1850 con la obra del geómetra suizo Ludwig Schäfli (1814-1895), sobre los poliedros regulares y sus grupos de isometrías en el espacio euclídeo de n dimensiones. El mismo Schäfli introduce el concepto general de poliedro regular, los clasifica y establece sus grupos de isometrías, de este modo, Schäfli dejaría un aporte sustancial al estudio de grupos de reflexiones. Sin embargo los trabajos de Schäfli no son publicados hasta fines del siglo XIX, permaneciendo ignorados por 50 años. Mucho más tarde, podríamos decir cien años después, enmarcado en el estudio de los poliedros regulares, los grupos de reflexiones ortogonales fueron clasificados por Coxeter en 1935 en [15], posteriormente, los grupos finitos de reflexiones unitarias son estudiados y clasificados por el mismo Coxeter, Shephard y Todd en [36] y [14], en [13] Cohen clasifica los grupos finitos de reflexiones cuaterniónicas y los grupos finitos de pseudo-reflexiones sobre los cuerpos p -ádicos son clasificados por Clark y Ewing en [12].

Por otra parte, tres áreas de estudios diferentes; la cristalografía, los poliedros regulares y la clasificación de las álgebras de Lie simples complejas, convergen en la clasificación de grupos de reflexiones euclídeos.

La clasificación de las álgebras de Lie simples complejas, desarrollada a fines

del siglo XIX en la tesis doctoral de Elie Cartan (1894) y también conocida por Joseph Killing, conduce a la determinación de los grupos de Weyl o grupos de reflexiones cristalográficos sobre un espacio euclídeo. El estudio de los grupos de Weyl, es un subtema del estudio de los grupos de reflexiones euclídeos: los grupos de Weyl son grupos de reflexiones que poseen sistemas de raíces que cumplen la condición cristalográfica. La clasificación de los grupos de Weyl es un refinamiento de la clasificación de los grupos de reflexiones euclídeos, y éstos tienen destacada intervención en otras áreas de la matemática, como por ejemplo en la Teoría de Lie, la Geometría Diferencial y la Geometría Algebraica.

En cristalografía, los grupos de Weyl son un interesante aporte a la determinación de los grupos puntuales.

El estudio de las representaciones de grupos fue iniciada hace más de un siglo por Frobenius. Es importante destacar el trabajo de Specht de 1935, sobre las representaciones del grupo simétrico, realizando las representaciones de este grupo a través de su acción natural en el anillo de polinomios y haciendo uso de polinomios antisimétricos dados por determinantes de Vandermonde. Posteriormente, Macdonald en 1972 presenta una realización de representaciones irreducibles de grupos de Weyl que, en cierto modo, generalizan la construcción dada por Specht para el grupo simétrico.

La teoría de representaciones de los grupos de reflexiones es tratada en los trabajos de McDonald [30], Lusztig [28], Hughes [18] y la sorprendente realización de Springer en [37], entre otros tantos autores.

Los modelos de Gelfand para un grupo finito, son representaciones cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles del grupo dado. En tal sentido, en [10] Bernstein, Gelfand I. y Gelfand S. presentan modelos para grupos de Lie compactos semisimples, a partir de entonces distintos tipos de modelos son presentados, ver [26], [33], [6], [17], [27], [3], [2], [5], [22], entre los que surgen dos tipos de modelos que pueden ser asociados a grupos de reflexiones; *El Modelo por Involuciones* y *El Modelo Polinomial*. Si bien estos tipos de modelos se adaptan a una interesante familia de grupos de reflexiones, queda un determinado número de grupos donde las construcciones asociadas a dichos tipos no producen un modelo de Gelfand, tal es el caso de los grupos de Weyl de tipo D_{2n} .

El objeto de esta tesis, es mostrar que una modificación del modelo polinomial

se adapta para obtener un modelo de Gelfand para un grupo de Weyl de tipo D_{2n} .

El trabajo está organizado en cuatro capítulos. En el primer capítulo se presenta una exposición sobre la teoría de representaciones de grupos finitos sobre un cuerpo \mathbb{k} . Se desarrolla la teoría en términos de módulos, debido a que en muchos casos se simplifica la notación, y también se enfatiza la construcción de los caracteres, enunciando los principales resultados. En el segundo capítulo, se introducen conceptos relacionados con grupos de reflexiones en espacios euclídeos, y se presentan los resultados clásicos de la teoría. El tercer capítulo está dedicado a la descripción de los tipos de modelos de Gelfand, modelo por involuciones y modelo polinomial, así como también a la exposición del modelo polinomial para un grupo de Weyl de tipo A_n, B_n y D_{2n+1} . Por último, en el cuarto capítulo, se presenta la construcción del modelo propuesto para un grupo de Weyl de tipo D_{2n} .

Capítulo 1

Representaciones de grupos

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos de la teoría de representaciones de grupos finitos sobre un cuerpo \mathbb{k} . Desarrollaremos la teoría en términos de módulos, debido a que en muchos casos se simplifica la notación, y también enfatizaremos la construcción de los caracteres, enunciando los principales resultados.

1.1. Representaciones lineales de grupos

Definición 1.1.1 Sea G un grupo, \mathbb{k} un cuerpo y V un espacio vectorial de dimensión finita mayor o igual que 1 sobre \mathbb{k} . Una **representación lineal** de G sobre \mathbb{k} es un morfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V)$; V se llama el **espacio de representación** de ρ y su dimensión se llama **grado de la representación**, que notaremos con $\text{gr}(\rho)$.

En el caso en que ρ sea un morfismo inyectivo, diremos que ρ es una **representación fiel** de G .

Fijada una base de V , cada endomorfismo de V se asocia, en forma unívoca, con una matriz. De este modo, una representación de un grupo G podrá definirse como un morfismo de grupo $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{k})$

$$|\rho(\sigma)|_B = |\rho_{ij}(\sigma)|_{1 \leq i, j \leq n}$$

siendo $GL(n, \mathbb{k})$ el conjunto de matrices inversibles de orden n , con valores en el cuerpo \mathbb{k} . Es decir, asociada con ρ , respecto de la base B , tenemos n^2 funciones:

$$\rho_{ij} : G \rightarrow \mathbb{k}$$

denominadas **funciones matriciales**.

Dos representaciones ρ y μ de G sobre los espacios V y W respectivamente se dicen **representaciones equivalentes** si existe un isomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ tal que el siguiente diagrama conmute para todo $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \mu(g) \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

o sea:

$$\varphi \rho(g) = \mu(g) \varphi \quad \forall g \in G$$

Observemos que la relación \sim definida en el conjunto de representaciones de G como:

$$\rho \sim \phi \Leftrightarrow \rho \text{ y } \phi \text{ son representaciones equivalentes}$$

es una relación de equivalencia.

Definición 1.1.2 Sea ρ una representación de G sobre el espacio vectorial V , un subespacio S de V se dirá $\rho(G)$ -**invariante**, si $\forall g \in G, \rho(g)(S) \subseteq S$. Si V no admite subespacios propios $\rho(G)$ -invariantes, entonces ρ se dirá una **representación irreducible** de G .

Dada una representación ρ de un grupo G y S es un subespacio $\rho(G)$ -invariante, la restricción de $\rho(g)$ al subespacio S da lugar a un morfismo de grupos

$$\tilde{\rho} : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(S)$$

Las representaciones de G obtenidas al restringir una representación ρ a subespacios $\rho(G)$ -invariantes se dirán **subrepresentaciones de ρ** . Es claro que encontrar subrepresentaciones de una representación ρ , es lo mismo que encontrar subespacios $\rho(G)$ -invariantes.

Una acción de un grupo G en un conjunto X da lugar a representaciones del grupo G . En efecto, consideremos V el espacio vectorial $\mathbb{k}^X = \{\psi : X \rightarrow \mathbb{k}\}$ con las operaciones usuales, y definimos la representación $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V = \mathbb{k}^X)$ inducida por la acción \star del grupo G en el conjunto X como:

$$\rho(g)(\psi)(x) = \psi(g^{-1} \star x) \quad \text{siendo } g \in G, \psi \in V = \mathbb{k}^X, x \in X$$

Un caso especial de representación permutacional es la llamada representación regular. Asociada con un grupo G podemos considerar la acción de G sobre sí mismo dada por:

$$\sigma \star \tau = \sigma\tau \quad (\sigma, \tau \in G)$$

Es decir, G actúa sobre sí mismo por traslación a izquierda.

Definición 1.1.3 *La representación permutacional inducida por la traslación a izquierda del grupo G se denomina **representación regular de G** y será notada con ρ .*

Es claro que también hay una representación permutacional inducida por la traslación a derecha de G sobre sí mismo. No es difícil comprobar que las representaciones permutacionales de un grupo inducidas por las traslaciones a izquierda y a derecha son equivalentes.

Observemos que el grado de la representación regular coincide con el orden del grupo G .

1.2. G -módulos

Definición 1.2.1 *Sea G un grupo y V un \mathbb{k} -espacio vectorial. Supongamos que existe una aplicación*

$$* : G \times V \rightarrow V$$

que cumple $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{k}$ y $\forall g, h \in G$:

1. $(gh) * v = g * (h * v)$
2. $1 * v = v$

$$3. g * (\lambda v) = \lambda (g * v)$$

$$4. g * (u + v) = g * u + g * v$$

Entonces la estructura $(V, *)$ se denomina **G -módulo**. Los subespacios W de V , cerrados para $*$ se denominan **G -submódulos**.

Existe una estrecha relación entre los G -módulos y las representaciones de G . Sea

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V)$$

una representación de G sobre \mathbb{k} , y $V = \mathbb{k}^n$, consideremos la aplicación

$$* : G \times V \rightarrow V \quad / \quad g * v = \rho(g)(v)$$

Entonces $V = \mathbb{k}^n$ es un G -módulo. Ahora bien, si V es un G -módulo, definimos una representación de G como:

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V) \quad / \quad \rho(g)(v) = g * v$$

En adelante trabajaremos con módulos o representaciones en forma indistinta.

Definición 1.2.2 Un G -módulo V se denomina **fiel** si no existe $g \in G$ tal que $g \neq 1$ y $\forall v \in V, g * v = v$.

Definición 1.2.3 Un G -módulo V no nulo se denomina **simple** si no tiene submódulos propios, es decir, los únicos submódulos de V son $\{0\}$ y V .

Las dos definiciones precedentes son compatibles con las definiciones de representación fiel y representación irreducible, respectivamente.

Definición 1.2.4 Sean V, W dos G -módulos. Una aplicación $\theta : V \rightarrow W$ se denomina **G -homomorfismo ó morfismo de representaciones**, si:

1. θ es una transformación lineal.
2. $\theta(g * v) = g * \theta(v), \forall g \in G, \forall v \in V$

En el caso en que θ sea un G -homomorfismo biyectivo, diremos que θ es un **G -isomorfismo**. Notaremos $\text{Hom}_G(V, W)$ al subespacio de $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ de los G -homomorfismos.

1.3. Álgebra de grupo

El álgebra de grupo de un grupo finito G es un espacio vectorial cuya dimensión coincide con el orden del grupo, y el cual posee una estructura adicional de álgebra. El álgebra de grupo es la fuente de la información necesaria para determinar todas las representaciones de un grupo finito.

Sea $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ un grupo finito y \mathbb{k} un cuerpo. Denotamos con $\mathbb{k}[G]$ al espacio vectorial sobre \mathbb{k} , con base formal $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, es decir:

$$\mathbb{k}[G] = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i : \lambda_i \in \mathbb{k} \text{ y } g_i \in G \right\}$$

Definición 1.3.1 En $\mathbb{k}[G]$ podemos definir la operación

$$u \cdot v = \sum_{j,i=1}^n \lambda_i \mu_j (g_i g_j) \quad \forall u, v \in \mathbb{k}[G]$$

La estructura $(\mathbb{k}[G], +, \cdot)$ es un álgebra asociativa unitaria denominada **álgebra de grupo** de G sobre \mathbb{k} .

Sea $1 \in \mathbb{k}$ el elemento unidad del cuerpo y $e \in G$ el elemento neutro del grupo G , entonces $1 \cdot e$ es el neutro multiplicativo del álgebra de grupo. Observemos que \mathbb{k} y G se identifican con subconjuntos de $\mathbb{k}[G]$

$$\begin{aligned} \mathbb{k} &\hookrightarrow \mathbb{k} \cdot e \subseteq \mathbb{k}[G] \\ G &\hookrightarrow 1 \cdot G \subseteq \mathbb{k}[G] \end{aligned}$$

Utilizamos el álgebra de grupo para definir un destacado G -módulo, y su correspondiente representación asociada.

Definición 1.3.2 Consideremos el álgebra de grupo $\mathbb{k}[G]$ como espacio vectorial, y la aplicación

$$* : G \times \mathbb{k}[G] \rightarrow \mathbb{k}[G] \quad / \quad g * \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (gg_i)$$

Entonces $V = \mathbb{k}[G]$ es un G -módulo, denominado **módulo regular**.

Es sencillo comprobar que la representación asociada con el módulo regular $\mathbb{k}[G]$ es equivalente a la representación regular.

Proposición 1.3.3 *El módulo regular es fiel.*

Demostración. Supongamos que existe $g \in G$ tal que $gv = v$ para todo v elemento del álgebra de grupo $\mathbb{k}[G]$. En particular, si $v = 1$, de la identidad precedente resulta $g = 1$ y $\mathbb{k}[G]$ es un módulo fiel. ■

Existe una identificación natural entre los G -módulo y los $\mathbb{k}[G]$ -módulo. Por un lado, dado $(V, *)$ un G -módulo, podemos definir la aplicación:

$$\circ : \mathbb{k}[G] \times V \rightarrow V \quad / \quad \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \circ v = \sum_{g \in G} \lambda_g (g * v)$$

de esta forma (V, \circ) es un $\mathbb{k}[G]$ -módulo.

Por otro lado, si (V, \circ) es un $\mathbb{k}[G]$ -módulo, podemos definir la aplicación

$$* : G \times V \rightarrow V \quad / \quad g * v = g \circ v$$

y así, $(V, *)$ es un G -módulo.

En adelante enunciaremos y trabajaremos con propiedades para $\mathbb{k}[G]$ -módulos, que debido a la anterior identificación, son también válidas para G -módulos.

1.4. Teorema de Maschke

En esta sección presentaremos un resultado importante en la teoría de representaciones, denominado Teorema de Maschke. Como consecuencia de este resultado la teoría de representaciones se reduce al estudio de las representaciones irreducibles.

Teorema 1.4.1 (Teorema de Maschke) *Sea G un grupo finito, \mathbb{k} un cuerpo de característica cero y V un $\mathbb{k}[G]$ -módulo. Si U es un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo de V , entonces existe un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo W de V tal que $V = U \oplus W$.*

Demostración. Ver [23] pág. 71. ■

Definición 1.4.2 Un $\mathbb{k}[G]$ -módulo V no nulo se denomina **completamente reducible** si existen $\mathbb{k}[G]$ -submódulos simples de V , U_1, \dots, U_r , tal que

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

Como consecuencia del teorema de Maschke se tiene que todo $\mathbb{k}[G]$ -módulo no nulo es una suma directa de $\mathbb{k}[G]$ -submódulos simples, hecho que formalizamos en el siguiente lema:

Lema 1.4.3 Sea G un grupo finito y \mathbb{k} un cuerpo de característica cero. Entonces todo $\mathbb{k}[G]$ -módulo V no nulo es completamente reducible.

Demostración. Usaremos inducción en la dimensión de V . El lema es claro si la dimensión de V es igual a 1. Supongamos que $\dim(V) > 1$. Si V es simple, no hay nada que probar. En caso contrario, V tiene un $\mathbb{k}[G]$ -módulo U no trivial, y utilizando el teorema de Maschke sabemos que existe un $\mathbb{k}[G]$ -módulo W no trivial, tal que $V = U \oplus W$. Luego como

$$\dim(U) < \dim(V) \quad \text{y} \quad \dim(W) < \dim(V)$$

podemos utilizar la hipótesis inductiva en cada uno de ellos, obteniendo la igualdad

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_m$$

siendo cada U_i y W_j un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo simple de V . ■

Consideremos ahora el álgebra de grupo $\mathbb{k}[G]$ del grupo finito G , sobre el cuerpo \mathbb{k} . Por lema 1.4.3 sabemos que existen submódulos simples del álgebra de grupo, U_1, \dots, U_r , tal que

$$\mathbb{k}[G] = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

Teorema 1.4.4 Con la notación del párrafo anterior, todo $\mathbb{k}[G]$ -módulo simple es isomorfo a algún $\mathbb{k}[G]$ -submódulo U_i .

Demostración. Ver [23] pág 91. ■

El teorema precedente tiene dos importantes consecuencias:

1. Todo grupo finito G tiene una cantidad finita de $\mathbb{k}[G]$ -módulos simples no isomorfos dos a dos.
2. Para determinar todos los $\mathbb{k}[G]$ -módulos simples sólo necesitamos descomponer al $\mathbb{k}[G]$ -módulo regular como suma directa de submódulos simples. Sin embargo, si el orden de G no es pequeño, esta no es una técnica eficiente.

1.5. Lema de Schur

El lema de Schur es un resultado básico de la teoría de módulos irreducibles y es clave en el estudio de las representaciones irreducibles de G .

Lema 1.5.1 (Schur) *Sea \mathbb{k} un cuerpo algebraicamente cerrado y sean V, W dos $\mathbb{k}[G]$ -módulos simples, entonces:*

1. *Si $\theta : V \rightarrow W$ es un $\mathbb{k}[G]$ -homomorfismo no nulo, entonces θ es un isomorfismo.*
2. *Si $\theta : V \rightarrow V$ es un $\mathbb{k}[G]$ -isomorfismo, entonces existe $\lambda \in \mathbb{k}$ tal que $\theta = \lambda Id_V$.*

Demostración. En primer lugar supongamos θ es un $\mathbb{k}[G]$ -homomorfismo no nulo, entonces existe $v \in V$ tal que $\theta(v) \neq 0$, por lo que $Img(\theta) \neq \{0\}$, y $Nu(\theta) \neq V$. Luego como $Img(\theta)$ es un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo de W , y W es un módulo simple, entonces $Img(\theta) = W$. Por otro lado como $Nu(\theta)$ también es un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo de V , y V es simple, entonces $Nu(\theta) = \{0\}$. Por ambos resultados θ es un $\mathbb{k}[G]$ -isomorfismo.

En segundo lugar, por ser \mathbb{k} algebraicamente cerrado, el endomorfismo θ tiene un autovalor $\lambda \in \mathbb{k}$, de esta forma $Nu(\theta - \lambda Id_V) \neq \{0\}$. Luego como V es simple y $Nu(\theta - \lambda Id_V)$ es $\mathbb{k}[G]$ -submódulo de V , se tiene que $Nu(\theta - \lambda Id_V) = V$. De

esta identidad se sigue que $\theta = \lambda Id_V$. ■

En el sentido recíproco, es válida la siguiente proposición:

Proposición 1.5.2 *Sea V un $\mathbb{k}[G]$ -módulo tal que $End_G(V) = \mathbb{k}Id_V$. Entonces V es un módulo simple.*

Demostración. Demostremos la proposición por reducción al absurdo. Supongamos U un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo propio de V . Por el teorema de Maschke existe un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo W , de forma tal que $V = U \oplus W$. Luego la proyección de V en U

$$\pi : V \rightarrow V \quad / \quad \pi(u + w) = u \quad u \in U, w \in W$$

es un $\mathbb{k}[G]$ -homomorfismo que no es múltiplo escalar de Id_V . ■

1.6. El carácter de una representación

El carácter de una representación contiene información sustancial respecto de la representación, y es una herramienta efectiva para realizar cálculos en la teoría de representaciones de grupos finitos.

Definición 1.6.1 *Sea V un $\mathbb{k}[G]$ -módulo de dimensión n , y ρ la representación asociada. Se denomina **carácter** de V , de grado n , a la función $\chi : G \rightarrow \mathbb{k}$ dada por:*

$$\chi(\sigma) = tr(\rho(\sigma))$$

donde tr indica la función traza. El carácter χ se dirá un **carácter irreducible**, si ρ es irreducible.

Notemos que fijada una base en V , la expresión del carácter de ρ en términos de las funciones matriciales correspondientes es:

$$\chi(\sigma) = \sum_{i=1}^n \rho_{ii}(\sigma)$$

Sin embargo, por ser la traza una función que no depende de la base elegida encontraremos propiedades especiales para el carácter.

Definición 1.6.2 Decimos que χ es un **carácter de G** si χ es el carácter de algún $\mathbb{k}[G]$ -módulo.

Definición 1.6.3 Una función $\varphi : G \rightarrow \mathbb{k}$ se dice una **función de clases** si se verifica:

$$\varphi(\sigma h) = \varphi(h\sigma) \quad (\forall \sigma, h \in G)$$

No es difícil verificar que una función $\varphi \in \mathbb{k}^G$ es una función de clases, si y sólo si φ es constante sobre las clases de conjugación de G . En consecuencia, si notamos con C el conjunto de clases de conjugación de G , corresponde notar con \mathbb{k}^C al espacio de funciones de clases. Observemos que hay una inmersión natural de \mathbb{k}^C en \mathbb{k}^G , que da lugar a pensar a \mathbb{k}^C como subespacio de \mathbb{k}^G cuando sea necesario.

Teniendo en cuenta el hecho que $tr(\rho\mu) = tr(\mu\rho)$, el carácter de una representación resulta ser una función de clases.

Proposición 1.6.4 Las representaciones equivalentes de un grupo finito tienen el mismo carácter.

Demostración. Sean ρ y μ representaciones equivalentes del grupo G sobre los espacios V y W respectivamente. Notemos con χ_ρ y χ_μ los caracteres correspondientes a ρ y μ . Existe un isomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ tal que

$$\varphi\rho(g) = \mu(g)\varphi$$

para todo $g \in G$. Luego se tiene

$$\chi_\rho(g) = tr(\rho(g)) = tr(\varphi^{-1}\mu(g)\varphi) =$$

$$tr(\mu(g)\varphi\varphi^{-1}) = tr(\mu(g)) = \chi_\mu(g)$$

con lo que queda demostrada la proposición. ■

La afirmación recíproca a la proposición 1.6.4 también es válida, pero para su demostración es necesario establecer primero la relación de ortogonalidad de los caracteres.

1.7. Relación de ortogonalidad

Dadas dos representaciones ρ y μ de G , con espacio de representación V y W respectivamente, indicaremos con $E_{\rho\mu}$ el espacio de transformaciones \mathbb{k} -lineales de V en W dado por:

$$E_{\rho\mu} = \{\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) : \phi\rho(\sigma) = \mu(\sigma)\phi, \forall \sigma \in G\}$$

Los elementos de $E_{\rho\mu}$ se denominan **operadores de entrelazamiento**. Notar que

$$E_{\rho\mu} = \text{Hom}_G(V, W)$$

El estudio de las representaciones irreducibles de un grupo G , puede realizarse a través del cálculo explícito de los operadores de entrelazamiento.

Será de suma utilidad introducir una forma bilineal en el espacio de funciones \mathbb{k}^G que llamaremos producto interno.

Definición 1.7.1 *Llamaremos **producto interno** en el espacio \mathbb{k}^G a la forma bilineal dada por:*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \alpha(\sigma) \beta(\sigma^{-1}) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{k}^G$$

En lo que sigue, fijamos \mathbb{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Consideremos ρ y μ dos representaciones irreducibles de G definidas sobre los espacios V y W respectivamente. Sea $\pi : \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ la aplicación definida como:

$$\pi(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mu(\sigma) \varphi \rho(\sigma)^{-1} \quad (1.1)$$

La razón por la que pedimos que la característica del cuerpo \mathbb{k} sea cero, es para que $\pi(\varphi)$ quede bien definido, ya que $|G|$ podría ser divisible por la característica y perdería sentido la expresión que define al morfismo π .

Conservando las notaciones precedentes, se tiene:

Proposición 1.7.2 *La aplicación π dada en (1.1) es un proyector en $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$, cuya imagen es el espacio $E_{\rho\mu} = \text{Hom}_G(V, W)$.*

Demostración. Resulta claro que π es un morfismo; además para $\tau \in G$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\mu(\tau) \pi(\varphi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mu(\tau) (\mu(\sigma) \varphi \rho(\sigma)^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mu(\tau\sigma) \varphi \rho(\sigma)^{-1} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{h\sigma \in G} \mu(\tau\sigma) \varphi \rho(\tau^{-1}\tau\sigma)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h\sigma \in G} \mu(\tau\sigma) \varphi \rho(\tau\sigma)^{-1} \right) \rho(\tau) \\
&= \pi(\varphi) \rho(\tau)
\end{aligned}$$

Es decir $\pi(\varphi)$ es un operador de entrelazamiento, luego, se tiene la inclusión $Img(\pi) \subseteq E_{\rho\mu}$. Podemos poner entonces:

$$\mu(\sigma) \pi(\varphi) \rho(\sigma)^{-1} = \pi(\varphi) \quad \forall \sigma \in G$$

luego

$$\pi(\pi(\varphi)) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mu(\sigma) \pi(\varphi) \rho(\sigma)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \pi(\varphi) = \pi(\varphi)$$

de donde $\pi^2 = \pi$, es decir que π es un proyector.

Por otra parte, si $\phi \in E_{\rho\mu}$ resulta:

$$\pi(\phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mu(\sigma) \phi \rho(\sigma)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \phi = \phi$$

y en consecuencia $E_{\rho\mu} = Img(\pi)$. ■

Manteniendo las notaciones precedentes, fijamos las bases $\{v_1, \dots, v_n\}$ en V y $\{w_1, \dots, w_m\}$ en W , y consideramos los morfismos $\psi_{ik} \in Hom_{\mathbb{k}}(V, W)$ dados por:

$$\psi^{ik}(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ w_k & \text{si } j = i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

No hay mayor dificultad en mostrar que los morfismos ψ^{ik} forman una base de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, en realidad, éstos se corresponden naturalmente con la base canónica de $\mathbb{K}^{n \times m}$. Como consecuencia de la proposición 1.7.2, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.7.3 *Los morfismos $\pi(\psi^{ik})$ generan el espacio $E_{\rho\mu}$.*

Asociamos a los morfismos $\rho(\sigma)$, $\mu(\sigma)$, ψ^{ik} y $\pi(\psi^{ik})$ sus respectivas matrices $[\rho_{ij}(\sigma)]$, $[\mu_{kl}(\sigma)]$, $[\psi_{lj}^{ik}]$ y $[\gamma_{lj}^{ik}]$ referidas a las bases fijadas.

Lema 1.7.4 *Se verifican las siguientes identidades:*

$$\gamma_{lj}^{ik} = \langle \rho_{ij}, \mu_{lk} \rangle \quad \forall i, j, k, l$$

Demostración. De la identidad:

$$\pi(\psi^{ik}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mu(\sigma) \psi^{ik} \rho(\sigma^{-1})$$

se sigue que:

$$\gamma_{lj}^{ik} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mu_{ls}(\sigma) \psi_{st}^{ik} \rho_{tj}(\sigma^{-1})$$

Como el único elemento no nulo de la matriz $[\psi_{st}^{ik}]$ es ψ_{ki}^{ik} que es igual a 1, se tiene:

$$\gamma_{lj}^{ik} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mu_{lk}(\sigma) \rho_{ij}(\sigma)^{-1} = \langle \rho_{ij}, \mu_{lk} \rangle$$

Que es la identidad que debíamos probar. ■

Conservando las notaciones precedentes, establecemos el siguiente teorema sobre relaciones de ortogonalidad entre las funciones matriciales.

Teorema 1.7.5 *Sean ρ y μ dos representaciones irreducibles de G . Se verifican las siguientes propiedades:*

1. Si ρ y μ no son equivalentes, entonces:

$$\langle \rho_{ij}, \mu_{kl} \rangle = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k, l \leq m)$$

2. Si \mathbb{k} es algebraicamente cerrado, para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ se tiene:

$$\langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l \text{ o } j \neq k \\ \frac{1}{n} & \text{si } i = l \text{ y } j = k \end{cases}$$

Demostración. Probemos la primer afirmación. En virtud de la proposición 1.7.2, tenemos:

$$[\mu_{kl}(\sigma)] [\gamma_{lj}^{ik}] = [\gamma_{lj}^{ik}] [\rho_{ij}(\sigma)] \quad \forall \sigma \in G$$

Si ρ y μ no son equivalentes $[\gamma_{lj}^{ik}] = 0$. Luego resulta del lema 1.7.4.

Probemos la segunda afirmación. En el caso particular que $\mu = \rho$, por el lema de Schür, se tiene que existe un escalar λ tal que:

$$[\gamma_{lj}^{ik}] = \lambda I$$

Ahora, calculando la traza de $[\gamma_{lj}^{ik}]$ obtenemos por un lado $n\lambda$, y por otro:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\gamma_{lj}^{ik}] &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \text{tr} ([\rho_{ls}(\sigma)] [\psi_{st}^{ik}] [\rho_{tj}(\sigma^{-1})]) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \text{tr} [\psi_{st}^{ik}] = \delta_{ik} \end{aligned}$$

donde δ es la función de Kröneker. Se sigue que:

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ \frac{1}{n} & \text{si } i = k \end{cases}$$

es decir:

$$[\gamma_{lj}^{ik}] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ \frac{1}{n} I & \text{si } i = k \end{cases} \quad (1.2)$$

El teorema se sigue del lema 1.7.4 y las identidades en (1.2). ■

Notemos con S_ρ el subespacio de \mathbb{k}^G generado por las funciones matriciales ρ_{ij} asociadas con una base de V . A continuación mostraremos que S_ρ no sólo no depende de la base elegida para establecer las funciones matriciales, sino que a representaciones equivalentes le corresponde el mismo subespacio.

Proposición 1.7.6 *Si ρ y μ son representaciones equivalentes, entonces*

$$S_\rho = S_\mu$$

Demostración. Sean V y W los espacios de representación de ρ y μ respectivamente, y sea $\varphi : V \rightarrow W$ un isomorfismo tal que:

$$\rho(\sigma) = \varphi^{-1} \mu(\sigma) \varphi \quad \forall \sigma \in G$$

Fijando bases arbitrarias B y D en V y en W respectivamente, se tiene la identidad matricial:

$$|\rho(\sigma)|_B = |\varphi|_{BD}^{-1} |\mu(\sigma)|_D |\varphi|_{BD} \quad \forall \sigma \in G$$

De esto se sigue que cada ρ_{ij} es combinación lineal de las funciones μ_{kl} , o sea $S_\rho \subseteq S_\mu$. Por el mismo argumento, teniendo en cuenta que φ es isomorfismo se obtiene que $S_\mu \subseteq S_\rho$, luego $S_\rho = S_\mu$. ■

Como consecuencia del teorema 1.7.5, tenemos dos corolarios los que exponemos a continuación.

Corolario 1.7.7 *Con las notaciones de los párrafos anteriores se cumple que:*

1. *Sea \mathbb{k} un cuerpo algebraicamente cerrado y ρ una representación irreducible de G , entonces*

$$\dim(S_\rho) = \text{gr}(\rho)^2$$

2. *Sean ρ_1, \dots, ρ_m representaciones irreducibles de G , dos a dos no equivalentes, entonces la suma:*

$$S_{\rho_1} + \dots + S_{\rho_m} \subseteq \mathbb{k}^G$$

es suma directa ortogonal. En particular, hay un número finito de representaciones irreducibles no equivalentes dos a dos.

Demostración. Probemos la primer afirmación. Sea $n = gr(\rho)$ y consideremos la identidad:

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \rho_{ij} = 0$$

donde $\lambda_{ij} \in \mathbb{k}$. Efectuando el producto escalar en ambos miembros de la identidad precedente por la función ρ_{kl} , en virtud de la parte ii) del teorema 1.7.5 se tiene:

$$0 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \langle \rho_{kl}, \rho_{ij} \rangle = \frac{1}{n} \lambda_{lk}$$

se sigue que $\lambda_{lk} = 0$. Luego las funciones ρ_{ij} matriciales son linealmente independientes, por lo que $\dim(S_\rho) = gr(\rho)^2$

Probemos la segunda afirmación. Utilizando la parte 1. del teorema 1.7.5 se puede deducir que los espacios S_{ρ_i} son ortogonales dos a dos. ■

Corolario 1.7.8 (*Relaciones de ortogonalidad entre los caracteres*). Sean ρ y μ dos representaciones irreducibles. Notemos con χ_ρ y χ_μ sus respectivos caracteres, entonces:

$$\langle \chi_\rho, \chi_\mu \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \text{ y } \mu \text{ no son equivalentes} \\ 1 & \text{si } \rho \text{ y } \mu \text{ son equivalentes} \end{cases}$$

Demostración. Partiendo de las identidades:

$$\chi_\rho = \sum_{i=1}^n \rho_{ii} \quad \text{y} \quad \chi_\mu = \sum_{i=1}^n \mu_{ii}$$

si ρ y μ no son equivalentes, por la parte 1. del teorema 1.7.5, se tiene que $\langle \chi_\rho, \chi_\mu \rangle = 0$. En cambio, si ρ y μ son equivalentes, tenemos $\chi_\rho = \chi_\mu$ y usando la parte 2. del teorema resulta:

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle \rho_{ii}, \rho_{jj} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \rho_{ii}, \rho_{ii} \rangle = 1$$

■

Este resultado indica que los distintos caracteres asociados a representaciones irreducibles forman un sistema ortonormal en \mathbb{k}^C , donde C es el conjunto de clases

de conjugación de G . Haciendo uso del teorema de Maschke, veremos que toda función en \mathbb{k}^G puede ser expresada como combinación lineal de funciones matriciales correspondientes a representaciones irreducibles. Para este fin, daremos primero una proposición auxiliar.

Proposición 1.7.9 \mathbb{k}^G puede ser generado como espacio vectorial por funciones matriciales asociadas a la representación regular de G .

Demostración. Sea $\phi \in \mathbb{k}^G$ una función no nula. Consideremos la función φ definida por:

$$\varphi(\sigma) = \phi(\sigma^{-1})$$

Tomemos una base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ de \mathbb{k}^G donde $\varphi_1 = \varphi$. Si ρ_{ij} designan las funciones matriciales de la representación regular asociadas a esta base, para $\sigma \in G$ se tiene:

$$\rho(\sigma)(\varphi_1) = \rho_{11}(\sigma)\varphi_1 + \rho_{21}(\sigma)\varphi_2 + \dots + \rho_{m1}(\sigma)\varphi_m$$

evaluando en $e \in G$:

$$\rho(\sigma)(\varphi_1)(e) = \rho_{11}(\sigma)\varphi_1(e) + \rho_{21}(\sigma)\varphi_2(e) + \dots + \rho_{m1}(\sigma)\varphi_m(e)$$

pero el primer miembro es:

$$\varphi(\sigma)(\varphi_1)(e) = \varphi_1(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma)$$

poniendo $\lambda_i = \varphi_i(e)$ resulta:

$$\phi = \lambda_1\rho_{11} + \lambda_2\rho_{21} + \dots + \lambda_m\rho_{m1}$$

y así ϕ es combinación lineal de funciones matriciales asociadas con ρ . ■

Definición 1.7.10 Dadas representaciones ρ_1, \dots, ρ_m de un grupo G sobre los espacios vectoriales V_1, \dots, V_m respectivamente, llamaremos **suma directa** de ρ_1, \dots, ρ_m a la representación $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m$, definida sobre el espacio $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ como:

$$(\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m)(g)(v_1 + \dots + v_m) = \rho_1(g)(v_1) + \dots + \rho_m(g)(v_m)$$

siendo $g \in G, v_i \in V_i$.

Consideremos ρ una representación de G sobre el espacio vectorial V ; es natural asociar a la descomposición del $\mathbb{k}[G]$ -módulo

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

como suma directa de $\mathbb{k}[G]$ -submódulos simples, una descomposición de ρ como suma directa de las representaciones ρ_i , en particular, el carácter χ asociado con ρ queda descompuesto como:

$$\chi = d_1\chi_1 + \cdots + d_r\chi_r$$

donde los χ_i son los caracteres distintos asociados con las subrepresentaciones ρ_i y donde $d_i = \langle \chi; \chi_i \rangle$ indica el número de estas subrepresentaciones asociadas con el carácter χ_i .

Teorema 1.7.11 *Sean ρ_1, \dots, ρ_m representantes de todas las clases de equivalencia de las representaciones irreducibles de G , entonces:*

$$\mathbb{k}^G = S_{\rho_1} \oplus \cdots \oplus S_{\rho_m}$$

Demostración. Considerando la representación regular, en virtud del lema 1.4.3, podemos descomponer \mathbb{k}^G en suma de subespacios ρ -invariantes:

$$\mathbb{k}^G = S_1 \oplus \cdots \oplus S_m$$

donde las correspondientes restricciones ρ^k de ρ son irreducibles. Eligiendo una base de \mathbb{k}^G que se obtenga al unir bases de los subespacios S_k , encontramos que las funciones matriciales ρ_{ij} de ρ referidas a esta base, o son iguales a cero o coinciden con alguna de las funciones matriciales ρ_{ij}^k para algún valor de k . Luego, las funciones ρ_{ij} y ρ_{ij}^k ($1 \leq k \leq m$) generan el mismo subespacio en \mathbb{k}^G . Ahora, el teorema se sigue de corolario 1.7.7. ■

Como consecuencia del teorema 1.7.11 y el corolario 1.7.7 podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 1.7.12 Sean ρ_1, \dots, ρ_m representantes de todas las clases de equivalencia de las representaciones irreducibles de G . Si \mathbb{k} es algebraicamente cerrado, entonces:

$$|G| = \sum_{i=1}^m \text{gr}(\rho_i)^2$$

Ya vimos que las funciones matriciales asociadas a las representaciones irreducibles del grupo G , generan el espacio de funciones \mathbb{k}^G . También vimos que el conjunto de caracteres irreducibles de G forman un sistema ortonormal del espacio de funciones de clases \mathbb{k}^C . A continuación mostraremos que los caracteres irreducibles de G generan el espacio de funciones de clases \mathbb{k}^C .

Teorema 1.7.13 Sea \mathbb{k} un cuerpo algebraicamente cerrado. Los caracteres irreducibles del grupo G forman una base ortonormal del espacio de funciones de clases \mathbb{k}^C .

Demostración. Pensando a \mathbb{k}^C como subespacio de \mathbb{k}^G , consideramos

$$\omega : \mathbb{k}^G \rightarrow \mathbb{k}^G$$

definido como:

$$(\omega(\phi))(\tau) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \phi(\sigma\tau\sigma^{-1}) \quad \phi \in \mathbb{k}^G, \tau \in G$$

Sin mayor dificultad puede probarse que ω es un endomorfismo de \mathbb{k}^G . Por otra parte, es claro que, cualquiera sea $\phi \in \mathbb{k}^G$, $\omega(\phi)$ es una función de clases y que si $\phi \in \mathbb{k}^C$, entonces $\omega(\phi) = \phi$. Se concluye que ω es un proyector de \mathbb{k}^G sobre \mathbb{k}^C . Dado que las funciones matriciales de las representaciones irreducibles de G generan \mathbb{k}^G , sus correspondientes proyecciones a través de ω generarán \mathbb{k}^C .

Consideremos una representación irreducible ρ de G de grado n y sea χ su carácter. A partir de la identidad:

$$\rho_{ij}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \sum_{k,l} \rho_{ik}(\sigma) \rho_{kl}(\tau) \rho_{lj}(\sigma^{-1}) = \sum_{k,l} \rho_{kl}(\tau) \rho_{ik}(\sigma) \rho_{lj}(\sigma^{-1})$$

usando 2 del teorema 1.7.5, se sigue que:

$$\begin{aligned}
(\omega(\rho))(\tau) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sum_{k,l} \rho_{kl}(\tau) \rho_{ik}(\sigma) \rho_{lj}(\sigma^{-1}) \\
&= \sum_{k,l} \rho_{kl}(\tau) \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \rho_{ik}(\sigma) \rho_{lj}(\sigma^{-1}) \\
&= \sum_{k,l} \rho_{kl}(\tau) \langle \rho_{ik}, \rho_{lj} \rangle \\
&= \sum_{k,l} \rho_{kl}(\tau) \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{lk} \\
&= \frac{\delta_{ij}}{n} \chi(\tau)
\end{aligned}$$

es decir, las funciones matriciales de ρ fuera de la diagonal se proyectan en cero y las de la diagonal, lo hacen sobre la recta generada por el carácter χ . De esto se sigue que \mathbb{k}^C puede generarse con los caracteres irreducibles de G , y por el corolario 1.7.8 se concluye la demostración. ■

El siguiente corolario hace referencia al número de representaciones irreducibles del grupo G .

Corolario 1.7.14 *Sea \mathbb{k} un cuerpo algebraicamente cerrado. El número de representaciones irreducibles del grupo G es igual al número de clases de conjugación de G .*

Demostración. Del teorema 1.7.13 se deduce que el número de caracteres irreducibles es igual a la dimensión de \mathbb{k}^C , pero esto es el cardinal de C . ■

1.8. Representaciones restringidas a subgrupos

En esta subsección y en la próxima, presentaremos la forma de relacionar las representaciones de un grupo con las representaciones de sus subgrupos.

Definición 1.8.1 Sea H un subgrupo de un grupo finito G , y V un $\mathbb{k}[G]$ -módulo. Debido a que $\mathbb{k}[H]$ es una subálgebra de $\mathbb{k}[G]$, V es también un $\mathbb{k}[H]$ -módulo denominado **restricción** de V a H . Lo notaremos $V \downarrow H$.

El carácter del $\mathbb{k}[H]$ -módulo $V \downarrow H$ que se obtiene por restricción del carácter χ del $\mathbb{k}[G]$ -módulo V , a los elementos de H , será notado como $\chi \downarrow H$.

Es conveniente indicar algunas observaciones básicas sobre el módulo restricción.

Sea V es un $\mathbb{k}[G]$ -módulo, y H un subgrupo de G , entonces:

- $\dim(V) = \dim(V \downarrow H)$.
- Si V es $\mathbb{k}[G]$ -módulo irreducible, podría suceder que la restricción $V \downarrow H$ no sea un $\mathbb{k}[H]$ -módulo irreducible.
- Si $V \downarrow H$ es un $\mathbb{k}[H]$ -módulo irreducible, entonces V es $\mathbb{k}[G]$ -módulo irreducible.

El carácter restringido $\chi \downarrow H$ puede ser expresado en términos de los caracteres irreducibles de H . Sean $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ los caracteres irreducibles del subgrupo H de G , entonces

$$\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + d_2\psi_2 + \dots + d_r\psi_r$$

donde $d_i = \langle \chi \downarrow H, \psi_i \rangle$; diremos que el carácter irreducible ψ_i de H es un constituyente de $\chi \downarrow H$ si d_i es no nulo.

1.9. Representaciones inducidas

Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G . Describiremos una construcción para generar representaciones de G a partir de representaciones de H .

Supongamos ρ una representación de G con espacio de representación V , y W un subespacio vectorial de V invariante bajo la acción de H . Para todo $g \in G$, no es difícil de observar que el subespacio gW depende únicamente de la coclase a izquierda de g módulo H , gH . Para cada coclase $\sigma \in G/H = \{gH : g \in G\}$ escribimos σW para denotar este subconjunto.

Definición 1.9.1 Sea ρ una representación de G con espacio de representación V , y W un subespacio vectorial de V invariante bajo la acción de H . Diremos que el $\mathbb{k}[G]$ -módulo V es **inducido** por el submódulo W si

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W$$

y notaremos $V = \text{Ind}_H^G W$ ó $V = W \uparrow G$.

La siguiente proposición establece que dada cualquier representación de H , existe una única representación inducida de G , y nos proporciona un manera para construirla. Antes necesitamos introducir la representación producto tensorial.

Definición 1.9.2 Sean ρ_1 y ρ_2 dos representaciones lineal de G con espacios de representación V y W respectivamente. Definimos la **representación producto tensorial** de G a la representación lineal $\rho : G \rightarrow GL(V \otimes W)$ tal que:

$$\rho(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) \quad \forall g \in G$$

Consideremos $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ bases de V y W respectivamente. Es conocido que $\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r\}$ es una base del espacio vectorial $V \otimes W$. Entonces existe una acción natural de G en $V \otimes W$

$$\cdot : G \times (V \otimes W) \rightarrow V \otimes W \quad / \quad g \cdot \left(\sum_{i,j} \lambda_{i,j} (v_i \otimes w_j) \right) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} (gv_i \otimes gw_j)$$

y no es difícil comprobar que $V \otimes W$ es un $\mathbb{k}[G]$ -módulo.

Si χ y ψ son los caracteres de V y W respectivamente, entonces el carácter del producto tensorial $V \otimes W$ es el producto de los caracteres de V y W

$$\chi\psi(g) = \chi(g) \psi(g) \quad \forall g \in G$$

Para más detalles ver [23] y [20].

Proposición 1.9.3 Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G . Existe una y sólo una representación de G , salvo equivalencias, inducida por una representación fija de H .

Demostración. Sea W el espacio de representación de H correspondiente a la representación prefijada, entonces W admite una estructura de $\mathbb{k}[H]$ -módulo a izquierda; y dado que $\mathbb{k}[G]$ admite naturalmente una estructura de $\mathbb{k}[H]$ -módulo a izquierda, el espacio

$$V = \mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} W$$

también admite una estructura de $\mathbb{k}[H]$ -módulo a izquierda.

El grupo G opera en V : a cada $g \in G$ se le asocia el endomorfismo $g \otimes 1$ de V . Por otra parte $\mathbb{k}[G]$ es un $\mathbb{k}[H]$ -módulo libre a derecha, que admite por base un sistema de representantes S de G/H ; por lo que si identificamos $\sigma \otimes W$ con σW , obtenemos

$$V \simeq \bigoplus_{\sigma \in S} \sigma W$$

La unicidad resulta inmediata si se tiene en cuenta que la acción de G en V se corresponde con la dada en la definición 1.9.1. ■

Sea H un subgrupo de G , y W un $\mathbb{k}[G]$ -módulo. En adelante notaremos $\chi \uparrow G$ al carácter del módulo inducido.

A continuación enunciaremos un teorema que relaciona el carácter del módulo inducido y el carácter del módulo restricción.

Teorema 1.9.4 (Teorema de Reciprocidad de Frobenius) *Sea H un subgrupo de un grupo finito G , χ el carácter de G y ψ el carácter de H . Entonces*

$$\langle \psi \uparrow G; \chi \rangle_G = \langle \psi; \chi \downarrow H \rangle_H$$

Demostración. Ver [23] pág. 230. ■

Es de suma utilidad contar con fórmulas cerradas que nos permitan evaluar los caracteres inducidos, a partir del carácter del subgrupo. Presentaremos dos fórmulas para evaluar el carácter inducido:

1. Sea ψ el carácter del subgrupo H de G , definamos la función

$$\bar{\psi} : G \rightarrow \mathbb{k} \quad / \quad \bar{\psi}(g) = \begin{cases} \psi(g) & \text{si } g \in H \\ 0 & \text{si } g \notin H \end{cases}$$

Utilizando el Teorema de Reciprocidad de Frobenius (teorema 1.9.4), se prueba que

$$(\psi \uparrow G)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \overline{\psi}(y^{-1}gy)$$

2. Sea $g \in G$, notaremos g^G la clase de conjugación de g en el grupo G , y $C_G(g)$ el centralizador de g en G . Definimos la función de clases en G como

$$f_g^G : G \rightarrow \{0, 1\} \quad / \quad f_g^G(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in g^G \\ 0 & \text{si } y \notin g^G \end{cases}$$

es decir f_g^G es la función característica de g^G . Resulta:

$$\langle \chi, f_g^G \rangle_G = \frac{\chi(g)}{|C_G(g)|}$$

Sea H un subgrupo de G , observemos que

$$f_g^G \downarrow H = \begin{cases} 0 & \text{si } H \cap g^G = \phi \\ \sum_{i=1}^m f_{g_i}^H & \text{si } H \cap g^G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\} \end{cases}$$

Si ψ es el carácter de H , entonces utilizando el Teorema de Reciprocidad de Frobenius (teorema 1.9.4) se obtiene la siguiente fórmula para evaluar el carácter inducido

$$(\psi \uparrow G)(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } H \cap g^G = \phi \\ |C_G(g)| \sum_{i=1}^m \frac{\psi(g_i)}{|C_H(g_i)|} & \text{si } H \cap g^G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\} \end{cases}$$

1.10. Indicador de Frobenius-Schür

Sea G un grupo finito y V un $\mathbb{k}[G]$ -módulo, entonces notaremos χ^2 al carácter del $\mathbb{k}[G]$ -módulo $V \otimes V$. Consideremos la transformación lineal

$$T : V \otimes V \rightarrow V \otimes V \quad / \quad T(v \otimes w) = w \otimes v \quad v, w \in V$$

y definimos los subespacios de $V \otimes V$

$$S(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : T(x) = x\}$$

$$A(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : T(x) = -x\}$$

denominados respectivamente parte simétrica de $V \otimes V$ y parte antisimétrica de $V \otimes V$. Ambos subespacios son $\mathbb{k}[G]$ -submódulos de $V \otimes V$, y denotamos χ_S y χ_A a los respectivos caracteres asociados.

Debido a que $V \otimes V = S(V \otimes V) \oplus A(V \otimes V)$ podemos descomponer el carácter χ^2 como

$$\chi^2 = \chi_S + \chi_A$$

Proposición 1.10.1 *Para cada $g \in G$ se tiene que*

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2))$$

y

$$\chi_A(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2))$$

Demostración. Ver [23] pág. 198. ■

Definición 1.10.2 *Sea χ un carácter irreducible de G , entonces definimos la función indicador de χ o **indicador de Frobenius-Schur**, y lo notaremos i_χ , como*

$$i_\chi = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ no es un constituyente de } \chi_S \text{ ni de } \chi_A \\ 1 & \text{si } 1_G \text{ es un constituyente de } \chi_S \\ -1 & \text{si } 1_G \text{ es un constituyente de } \chi_A \end{cases}$$

Observemos que una forma equivalente de escribirlo es

$$i_\chi = \langle \chi_S - \chi_A, 1_G \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2)$$

El siguiente corolario relaciona las representaciones reales de G y el número de involuciones en G .

Proposición 1.10.3 (Contador de involuciones de Frobenius-Schur) *Para cada carácter irreducible χ de G , resulta*

$$i\chi = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ no es real} \\ 1 & \text{si } \chi \text{ es real, y puede ser realizado sobre } \mathbb{R} \\ -1 & \text{si } \chi \text{ es real, y no puede ser realizado sobre } \mathbb{R} \end{cases}$$

Más aún, para todo $g \in G$

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} (i\chi) \chi(g) = |\{h \in G : h^2 = g\}|$$

En particular

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} (i\chi) \chi(1) = |\{y \in G : y^2 = 1\}| = t$$

siendo t el número de involuciones en G .

Demostración. Ver [23] pág 274. ■

Capítulo 2

Grupo de Reflexiones

En este capítulo introduciremos conceptos relacionados con grupos de reflexiones en espacios euclídeos, y presentaremos los resultados clásicos de la teoría. El origen de esta teoría se relaciona con tres áreas de estudio precedentes, que convergen en dicha teoría: la primera es el estudio de las simetrías de poliedros regulares, la segunda es el estudio de la teoría de grupos de Lie y álgebras de Lie semisimples sobre el cuerpo de los números complejos, y la tercera es el estudio de la cristalografía. En la actualidad, los grupos de reflexiones se relacionan con diversos campos, como el estudio de los grupos de trenzas, las álgebras de Hecke y la geometría algebraica, entre otros.

2.1. Reflexión ortogonal

Definición 2.1.1 Sea (V, \langle, \rangle) un espacio euclídeo, y $\alpha \in V$ no nulo. Consideremos el hiperplano $H_\alpha = \{x \in V : \langle x, \alpha \rangle = 0\}$. La **reflexión ortogonal** asociada con α es un operador lineal $s_\alpha : V \rightarrow V$ tal que

$$\begin{cases} s_\alpha(x) = x & \text{si } x \in H_\alpha \\ s_\alpha(x) = -x & \text{si } x \in H_\alpha^\perp \end{cases}$$

H_α se denomina **hiperplano de reflexión**.

Proposición 2.1.2 Se cumplen las siguientes propiedades:

1. La reflexión asociada con α se puede definir mediante la sencilla fórmula

$$s_\alpha(x) = x - 2 \frac{\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$$

Observar que $\forall k \in \mathbb{R}$ no nulo, $s_\alpha = s_{k\alpha}$.

2. s_α es una transformación ortogonal.

3. $\det s_\alpha = -1$

4. Si φ es un automorfismo ortogonal de V , entonces:

a) $\varphi s_\alpha \varphi^{-1} = s_{\varphi \cdot \alpha}$

b) $\varphi \cdot H_\alpha = H_{\varphi \cdot \alpha}$

Demostración. Ver [24] pág. 7. ■

Definición 2.1.3 Sea $O(V)$ el grupo ortogonal de V , es decir:

$$O(V) = \{f \in \text{End}_K(V) : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in V\}$$

Diremos que un subgrupo $W \subseteq O(V)$ es un **grupo de reflexiones** si es generado, como grupo, por reflexiones.

Definición 2.1.4 Un grupo de reflexiones $W \subseteq O(V)$ es **reducible** si este puede ser descompuesto como $W = W_1 \times W_2$, donde W_1, W_2 son subgrupos no triviales de W , generados por reflexiones. En caso contrario se dirá **irreducible**.

2.2. Sistemas de Raíces

En adelante consideraremos $W \subseteq O(V)$ un grupo finito de reflexiones, actuando en un espacio euclídeo V . Las siguientes definiciones y proposiciones tienen como objetivo caracterizar la estructura de W como un grupo abstracto.

Los sistemas de raíces son una forma alternativa, y de gran importancia, para reducir el problema de clasificar los grupos finitos de reflexiones, a una serie de consideraciones de carácter geométrico, relativamente elementales.

En primer lugar presentaremos el concepto de sistemas de raíces en forma general.

Definición 2.2.1 Sea V un espacio vectorial, definimos como **sistema de raíces**, a un subconjunto finito de vectores no nulos Δ que cumple:

1. $-\Delta = \Delta$.
2. Si $\alpha, k\alpha \in \Delta$, entonces $k = \pm 1$.
3. Para cada $\alpha \in \Delta$, $s_\alpha(\Delta) \subseteq \Delta$.

Cada elemento de Δ se denomina **raíz**.

Dado un sistema de raíces $\Delta \subset V$, queda determinado un grupo de reflexiones

$$W(\Delta) = \langle s_\alpha : \alpha \in \Delta \rangle$$

Además $W(\Delta)$ es finito, pues utilizando la propiedad 3 de la definición 2.2.1 podemos establecer un morfismo inyectivo

$$\gamma : W(\Delta) \rightarrow \mathcal{S}_\Delta$$

siendo \mathcal{S}_Δ el grupo simétrico del conjunto Δ . La inyectividad de γ se sigue del siguiente hecho: si $\varphi \in W(\Delta)$ fija puntualmente a Δ , entonces $\varphi = Id$.

Es importante remarcar que existen sistemas de raíces distintos, tal que los grupos de reflexiones asociados a cada uno de ellos coinciden. Por ejemplo, sea Δ_1 un sistema de raíces, modifiquemos la longitud de los vectores $\alpha \in \Delta_1$ de manera tal que los vectores que esten en una misma $W(\Delta_1)$ -órbita, tengan la misma longitud. Así determinamos un sistema de raíces Δ_2 tal que $W(\Delta_1) = W(\Delta_2)$.

Por otro lado, observemos que dado un grupo de reflexiones finito W , el conjunto

$$\Delta_W = \{\alpha : s_\alpha \in W \text{ y } \|\alpha\| = 1\}$$

es un sistema de raíces tal que $W(\Delta_W) = W$.

Si bien es verdad que cada grupo de reflexiones queda determinado por la estructura geométrica de Δ_W , existe un inconveniente en su utilización para la

clasificación de los grupos de reflexiones: el cardinal de Δ_W puede ser relativamente grande comparado con la dimensión de V . Este problema nos conduce a buscar un subconjunto de Δ_W , a partir del cual se pueda reconstruir Δ_W ; es decir un subconjunto razonablemente más pequeño que pueda sintetizar toda la información surgida de Δ_W .

En adelante, notaremos como Δ , tanto a los sistemas de raíces, como a los sistemas de raíces asociados con W .

Definición 2.2.2 *Sea W un grupo de reflexiones, y Δ un sistema de raíces asociado fijo. Elijamos $t \in V$ tal que $\langle t, \alpha \rangle \neq 0, \forall \alpha \in \Delta$. Entonces Δ se particiona en dos conjuntos*

$$\Delta_t^+ = \{\alpha \in \Delta : \langle t, \alpha \rangle > 0\} \quad \Delta_t^- = \{\alpha \in \Delta : \langle t, \alpha \rangle < 0\}$$

denominados **sistema positivo** de raíces y **sistema negativo** de raíces, respectivamente.

Observación 2.2.3 *La comprobación de las propiedades siguientes no presenta mayor dificultad:*

1. $\alpha \in \Delta_t^+$ si y sólo si $-\alpha \in \Delta_t^-$.
2. $|\Delta_t^+| = |\Delta_t^-|$.
3. Geométricamente Δ queda particionado por el hiperplano ortogonal a t .
4. $w(\Delta_t^+) = (\Delta_{w(t)})^+$ para cada $w \in W$.

En lo sucesivo consideraremos $t \in V$ fijo y notaremos $\Delta^+ = \Delta_t^+$.

Definición 2.2.4 *Un subconjunto Π de Δ^+ se denomina **sistema fundamental** para el sistema de raíces Δ , si Π es minimal con respecto a la propiedad*

$$\forall \beta \in \Delta^+, \beta = \sum_i \lambda_i \alpha_i \quad \text{con } \alpha_i \in \Pi \text{ y } \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

es decir, un conjunto minimal tal que todo elementos en Δ^+ es combinación lineal no negativa de elementos de Π . Cada $\alpha_i \in \Pi$ se denomina **raíz fundamental**, y la reflexión asociada S_{α_i} , se denomina **reflexión fundamental**.

Los siguientes resultados caracterizan los sistemas fundamentales.

Lema 2.2.5 *Sea Π un sistema fundamental para el sistema de raíces Δ , y $\alpha, \beta \in \Pi$. Si $\alpha \neq \beta$ entonces $\langle \alpha; \beta \rangle \leq 0$.*

Demostración. Ver [24] pág. 39. ■

A partir del lema precedente, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.6 *Sea Π es un sistema fundamental para el sistema de raíces Δ , entonces Π es una base del subespacio generado por Δ .*

Demostración. Por definición, es claro que Π y Δ generan el mismo subespacio.

Probemos que Π es un conjunto de vectores linealmente independiente, por reducción al absurdo. Supongamos que existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = 0$$

Si todos los escalares no nulos tienen el mismo signo, consideramos t tal que $\Delta^+ = \Delta_t^+$ y evaluamos:

$$0 = \left\langle t, \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle t, \alpha_i \rangle$$

Dado que $\langle t, \alpha_i \rangle > 0, \forall i$, la identidad sólo ocurre el caso en que todos los escalares sean iguales a 0. En otro caso, hay escalares positivos y escalares negativos. El conjunto $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ puede ser descompuesto como una unión disjunta $I \sqcup J$ donde:

$$I = \{i \in I_n : \lambda_i > 0\} \quad J = \{j \in I_n : \lambda_j \leq 0\}$$

Ponemos:

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i \alpha_i \quad y \quad v = \sum_{j \in J} \lambda_j \alpha_j$$

Por el argumento anterior, debe ser $u \neq 0$. Se tiene:

$$u = -v \quad y \quad 0 \leq \langle u, u \rangle = -\langle u, v \rangle$$

Pero, en virtud del lema previo, es:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i \in I, j \in J} \lambda_i \lambda_j \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \geq 0$$

de donde resulta:

$$0 \leq \langle u, u \rangle = -\langle u, v \rangle \leq 0$$

y luego u debe ser igual a 0, lo que es una contradicción. ■

Proposición 2.2.7 *Fijado el sistema de raíces Δ^+ , existe un único sistema fundamental $\Pi \subseteq \Delta^+$.*

Demostración. Ver [16] pág. 39. ■

El cardinal de cualquier sistema fundamental Π es un invariante para un sistemas de raíces Δ dado, debido a que el mismo es la dimensión del subespacio de V generado por Δ . A este valor se lo denomina **rango** de W .

Utilizando el concepto de sistema fundamental podemos establecer una definición equivalente a la definición 2.1.4.

Definición 2.2.8 *Un subgrupo finito de reflexiones W con sistema fundamental de raíces Π , se denomina **irreducible** si no existen subconjuntos $\Pi_1, \Pi_2 \subset \Pi$ ortogonales y no vacíos tal que $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$. En otro caso se dira que W es un subgrupo **reducible**.*

El siguiente teorema establece la acción transitiva de W tanto en los sistemas positivos, como en los sistemas fundamentales.

Teorema 2.2.9 *Dos sistemas positivos o dos sistemas fundamentales arbitrarios, son conjugados bajo la acción de W .*

Demostración. Ver [19] pág. 10. ■

Proposición 2.2.10 *Sea Δ un sistema de raíces de W y Π el sistema fundamental asociado. Para $w \in W$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $w(\Delta^+) = \Delta^+$.
2. $w(\Pi) = \Pi$.
3. $w = Id$.

Demostración. Ver [19] pág. 15 ■

Fijemos un sistema fundamental Π y su correspondiente sistema de raíces positivo Δ^+ en Δ . El siguiente teorema afirma que todo grupo de reflexiones W es generado por reflexiones fundamentales.

Teorema 2.2.11 *Dado un sistema fundamental Π , se tiene que:*

$$W = \langle S_{\alpha_i} : \alpha_i \in \Pi \rangle$$

Demostración. Ver [19] pág. 11. ■

Definición 2.2.12 *Una **presentación** de un grupo W es una lista de generadores $\{w_i\}_{i=1}^m$, junto con una lista de relaciones $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ entre ellos, tal que toda relación en los generadores $\{w_i\}_{i=1}^m$ puede ser deducida de las relaciones $\{\psi_i\}_{i=1}^n$. Una presentación de un grupo será escrita como*

$$W = \langle w_i \in W, \psi_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \rangle$$

La definición anterior equivale a presentar W como cociente de un grupo libre, es decir $W = F/N$ donde:

- F es el grupo libre generado por $\{f_i\}_{i=1}^m$
- N es el subgrupo normal de F generado por el conjunto R dado por las relaciones $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ en los generadores $\{f_i\}_{i=1}^m$, es decir

$$N = \bigcap_{R \subseteq K \triangleleft F} K$$

Es posible encontrar una presentación para W eficiente, como un grupo abstracto, utilizando estos generadores y algunas relaciones entre ellos, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 2.2.13 *Sea W un grupo finito de reflexiones y $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ un sistema fundamental en Δ , entonces W puede ser presentado por generadores $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}$ sujetos a las relaciones*

$$(s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m(i,j)} = 1$$

siendo $m(i, j)$ el orden de $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$ en W .

Demostración. Ver [19] pág. 16. ■

2.3. Clasificación de los Sistemas de Coxeter

2.3.1. Grupos de Coxeter y Sistemas de Coxeter

La estructura algebraica básica utilizada para comprender los grupos finitos de reflexiones, son los sistemas de Coxeter y los grupos de Coxeter. El objetivo de esta sección es definir y clasificar los diferentes grupos de Coxeter.

Definición 2.3.1 *Un grupo W es un **grupo de Coxeter**, si W puede ser presentado por un sistema S de generadores sujetos a relaciones del tipo $(ss')^{m_{ss'}} = 1$, para $s, s' \in S$, siendo*

$$m_{ss} = 1 \quad \text{y} \quad m_{ss'} \in \mathbb{N}_{>1} \cup \{\infty\} \quad \text{si } s \neq s'$$

El par (W, S) es denominado **sistema de Coxeter** de rango $|S|$.

Observemos que cada sistema de Coxeter determina una presentación de W .

Proposición 2.3.2 *Todo grupo finito de reflexiones es un grupo de Coxeter.*

Demostración. Es consecuencia del teorema 2.2.13. ■

En forma consistente con la definición 2.2.8, consideramos:

Definición 2.3.3 *El sistema de Coxeter (W, S) se denomina **reducible** si W es el producto directo de dos subgrupos $W = W_1 \times W_2$, y existen $S_1 \subset W_1$, $S_2 \subset W_2$ no vacíos tal que $S = S_1 \sqcup S_2$ (unión disjunta de S_1 y S_2), y (W_1, S_1) , (W_2, S_2) son sistemas de Coxeter. En otro caso, W se denomina **irreducible**.*

La importancia de estudiar los sistemas de Coxeter se debe a que los conceptos de rango e irreducibilidad no están bien definidos para los grupos de Coxeter, y en cambio sí para los sistemas. Por ejemplo consideremos el grupo diedral de seis elementos $\mathbf{D}(6)$: si tomamos la presentación

$$\mathbf{D}(6) = \langle s_1, s_2 : (s_1)^2 = (s_2)^2 = (s_1 s_2)^6 = 1 \rangle$$

entonces tenemos un sistema de Coxeter de rango dos. Pero si ahora consideramos la descomposición

$$\mathbf{D}(6) = \mathbf{D}(3) \times \mathbb{Z}_2$$

donde

$$\mathbf{D}(3) = \langle s_1, s_2 : (s_1)^2 = (s_2)^2 = (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle$$

y

$$\mathbb{Z}_2 = \langle s_3 : (s_3)^2 = 1 \rangle$$

tenemos un sistema de Coxeter reducible de rango tres.

Los grafos de Coxeter, definidos a continuación, son una herramienta efectiva para organizar el tratamiento de la clasificación de los sistemas de Coxeter.

Definición 2.3.4 *Un grafo marcado tal que $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ se denomina **grafo de Coxeter**.*

Observación 2.3.5 *Es importante tener presente que:*

1. Si G es un grafo marcado con m nodos, podemos definir una forma cuadrática del siguiente modo:

$$Q_G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad Q_G(x_1, \dots, x_m) = [x_1 \dots x_m] A^t [x_1 \dots x_m]$$

donde $A = [a_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p_{ij}}\right) & \text{si } \exists \text{ una arista entre } i \text{ y } j \\ 0 & \text{si } \nexists \text{ una arista entre } i \text{ y } j \end{cases}$$

2. Un grafo marcado se denomina **definido positivo**, si la forma cuadrática asociada Q_G es definida positiva.
3. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$ un conjunto de vectores tal que $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$, podemos definir un grafo marcado teniendo presente las siguientes condiciones:

- $\{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de vértices.
- Existe una arista entre los i y j si $i \neq j$, y $\langle v_i, v_j \rangle \neq 0$.
- Se marca la arista ij con el valor $p_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\langle v_i, v_j \rangle}{\|v_i\| \|v_j\|} = -\cos\left(\frac{\pi}{p_{ij}}\right)$$

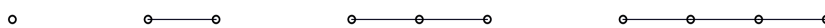
Cada sistema de Coxeter (W, S) puede ser representado por un único grafo marcado, el cual se obtiene de la siguiente forma:

- S es el conjunto de vértices.
- Dados $s, s' \in S$, si $m_{ss'} = 2$ no existe una arista entre s y s' .
- Dados $s, s' \in S$, si $m_{ss'} \geq 3$ existe una arista entre s y s' , marcada con el valor $m_{ss'}$.

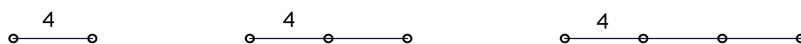
Observemos que el grafo marcado asociado a un sistema de Coxeter es un grafo de Coxeter. Para clasificar los grupos finitos de reflexiones, primero listaremos todos los grafos de Coxeter conexos definidos positivos. Luego presentaremos sistemas de raíces finitos para cada uno de ellos.

Proposición 2.3.6 *Los grafos de Coxeter conexos definidos positivos son*

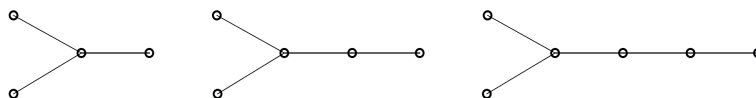
A_n $n \geq 1$



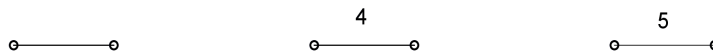
B_n $n \geq 2$



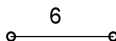
D_n $n \geq 4$



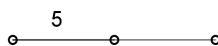
H_2^n $n \geq 3, n \neq 6$



G_2



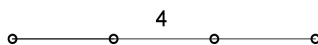
I_3



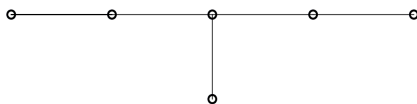
I_4



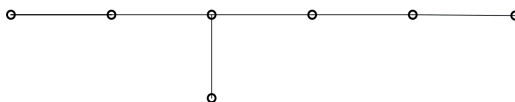
F_4



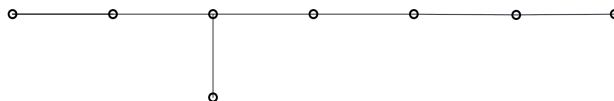
E_6



E_7



E_8



Demostración. Ver [16] pág. 57. ■

A continuación enunciamos dos teoremas que caracterizan los grafos de Coxeter de todo sistema de Coxeter.

Teorema 2.3.7 *El grafo de Coxeter de todo sistema de Coxeter finito es definido positivo.*

Demostración. Ver [16] pág 59. ■

Teorema 2.3.8 *El grafo de Coxeter de un sistema de Coxeter (W, S) es conexo si y sólo si (W, S) es irreducible.*

Demostración. Ver [16] pág. 57. ■

2.3.2. Grupos de reflexiones y sistemas de Coxeter. Clasificación

En esta sección expondremos la relación existente entre los grupos finitos de reflexiones y los sistemas de Coxeter finitos. A continuación presentaremos

la clasificación de los grupos finitos de reflexiones y de los sistemas de Coxeter finitos, utilizando los grafos de Coxeter.

Sea W un subgrupo finito de reflexiones, podemos determinar $S \subset W$, único salvo isomorfismos, tal que (W, S) es un sistema de Coxeter. Consideremos Δ el sistema de raíces de W , $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un sistema fundamental asociados a Δ , y $S = \{s_{\alpha_i} : \alpha_i \in \Pi\}$ el correspondiente conjunto de reflexiones fundamentales. Entonces utilizando el teorema 2.2.13 podemos asegurar que (W, S) es un sistema de Coxeter finito.

La existencia del sistema de Coxeter (W, S) depende de la elección de un sistema fundamental de Δ . Sin embargo, salvo isomorfismos, la presentación es independiente de tal elección. Sean Π, Π' dos sistemas fundamentales de Δ , y S, S' los respectivos conjuntos de reflexiones fundamentales. Como W actúa transitivamente en los sistemas fundamentales, existe $\varphi \in W$ tal que $\varphi\Pi = \Pi'$. Luego por el apartado 4 de la proposición 2.1.2 existe un automorfismo de W que envía S en S' , el cual induce un isomorfismo entre las presentaciones

$$W = \langle s_{\alpha_i} \in S : (s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m(i,j)} = 1 \rangle \quad \text{y} \quad W = \langle s'_{\alpha_i} \in S' : (s'_{\alpha_i} s'_{\alpha_j})^{m(i,j)} = 1 \rangle$$

Por lo expuesto en los párrafos anteriores la aplicación

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de isomorfismos de} \\ \text{grupos finitos de reflexiones} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de isomorfismos de} \\ \text{sistemas de Coxeter finitos} \end{array} \right\}$$

está bien definida. La siguiente proposición establece que ψ es inyectiva.

Proposición 2.3.9 *Dos grupos finitos de reflexiones son isomorfos si y sólo si los sistemas de Coxeter asociados a cada uno de ellos son isomorfos.*

Demostración. Ver [24] pág. 72. ■

La suryectividad de Ψ se sustenta en los dos teoremas siguientes, y dan lugar de este modo a la clasificación de los sistemas de Coxeter finitos irreducibles.

Teorema 2.3.10 *Si (W, S) es un sistema de Coxeter finito e irreducible, entonces su grafo de Coxeter es alguno de la siguiente lista:*

$$A_n (n \geq 1), B_n (n \geq 2), D_n (n \geq 4), H_2^n (n \geq 3, n \neq 6), G_2, I_3, I_4, F_4, E_6, E_7, E_8.$$

Demostración. Ver [24] pág. 81. ■

Teorema 2.3.11 *Cada sistema de Coxeter representado por un grafo de Coxeter del tipo*

$A_n (n \geq 1), B_n (n \geq 2), D_n (n \geq 4), H_2^n (n \geq 3, n \neq 6), G_2, I_3, I_4, F_4, E_6, E_7, E_8$
surge de un grupo finito de reflexiones.

Demostración. Ver [24] pág. 82. ■

Entonces Ψ es una aplicación biyectiva entre el conjunto de clases de isomorfismos de grupos finitos de reflexiones y el conjunto de clases de sistemas de Coxeter finitos. Así tenemos la clasificación resuelta de los grupos finitos de reflexiones.

En la siguiente lista presentamos los sistemas de raíces para los grafos de Coxeter involucrados en los dos teoremas precedentes (ver construcción en [19] pág. 41 y en [24] pág. 93). En todo lo que sigue, consideramos $\{e_i\}$ la base canónica de $V = \mathbb{R}^n$ ó $V = \mathbb{R}^{n+1}$, y \bigsqcup para indicar la unión disjunta.

1.

$$\Delta_{A_n} = \{e_i - e_j : i \neq j, 1 \leq i, j \leq n+1\}$$

$$|\Delta_{A_n}| = n(n+1)$$

2.

$$\Delta_{B_n} = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq n\} \bigsqcup \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$|\Delta_{B_n}| = 2n^2$$

3.

$$\Delta_{D_n} = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$|\Delta_{D_n}| = 2n(n-1)$$

4. $\Delta_{E_6} = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, donde

$$\Delta_1 = \{\pm e_i \pm e_j : 3 \leq i < j \leq 7\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \pm \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \lambda_i e_i : \lambda_i = \pm 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_8 = 1 \text{ y } \prod_{i=1}^8 \lambda_i = 1 \right\}$$

$$|\Delta_{E_6}| = 72$$

5. $\Delta_{E_7} = \Delta_1 \sqcup \Delta_2 \sqcup \Delta_3$ donde

$$\Delta_1 = \{\pm e_i \pm e_j : 2 \leq i < j \leq 7\}$$

$$\Delta_2 = \{\pm (e_1 + e_8)\}$$

$$\Delta_3 = \left\{ \pm \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \lambda_i e_i : \lambda_i = \pm 1, \lambda_1 = \lambda_8 = 1 \text{ y } \prod_{i=1}^8 \lambda_i = 1 \right\}$$

$$|\Delta_{E_7}| = 126$$

6. $\Delta_{E_8} = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, donde

$$\Delta_1 = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 8\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \lambda_i e_i : \lambda_i = \pm 1 \text{ y } \prod_{i=1}^8 \lambda_i = 1 \right\}$$

$$|\Delta_{E_8}| = 240$$

7.

$$\Delta_{G_2} = \{\pm (e_i - e_j) : i < j\} \cup \{\pm (2e_i - e_j - e_k) : j < k, i = j, k\}$$

$$|\Delta_{G_2}| = 12$$

8.

$$\Delta_{F_4} = \{\pm e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j : i < j\} \cup \left\{ \frac{1}{2} (\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\}$$

$$|\Delta_{F_4}| = 48$$

9.

$$\Delta_{H_2^n} = \left\{ \left(\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) : 0 \leq k \leq 2n - 1 \right\}$$

$$|\Delta_{H_2^n}| = n$$

10. $\Delta_{I_3} = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$

$$\Delta_1 = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq 3\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \text{permutaciones pares de } \left(\pm \left(\beta + \frac{1}{2} \right), \pm \beta, \pm \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$|\Delta_{I_3}| = 30$$

11. $\Delta_{I_4} = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$

$$\Delta_1 = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq 4\} \sqcup \left\{ \frac{1}{2} (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \text{permutaciones pares de } \left(\pm \left(\beta + \frac{1}{2} \right), \pm \beta, \pm \frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$$

$$|\Delta_{I_3}| = 120$$

2.4. Grupos de Weyl

Definición 2.4.1 Sea V un espacio euclídeo y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V . Denominamos **retículo** en V al conjunto

$$\mathcal{L} = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^n k_i v_i : k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

es decir, \mathcal{L} es el conjunto de todas las combinaciones lineales enteras de los elementos de una base de V .

Definición 2.4.2 Sea W un subgrupo de $O(V)$, diremos que W es un **grupo de Weyl** si y sólo si existe un retículo \mathcal{L} invariante bajo todo elemento de W . Los grupos de Weyl también son denominados grupos cristalográficos.

En adelante supongamos W un grupo de Coxeter, con sistema fundamental $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ y reflexiones fundamentales $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_m}$. Notaremos el orden de $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$ como $m(i, j)$.

Proposición 2.4.3 Si W es un grupo de Weyl, entonces cada uno de los $m(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Demostración. Consideremos la rotación $s_i s_j$, con i, j fijos. Tomando una base apropiada B , la matriz de la rotación es

$$[s_i s_j]_B = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{m(i,j)}\right) & -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{m(i,j)}\right) & & \\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{m(i,j)}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m(i,j)}\right) & & \\ & & & \\ & & & I_{n-2} \end{bmatrix}$$

cuya traza es $\text{tr}([s_i s_j]_B) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{m(i,j)}\right) + (n-2)$

Si consideramos $B_{\mathcal{L}}$ una base del retículo, entonces $\text{tr}([s_i s_j]_{B_{\mathcal{L}}}) \in \mathbb{Z}$, y como la traza es invariante para las transformaciones lineales, entonces

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{m(i,j)}\right) + (n-2) \in \mathbb{Z}$$

de lo que se deduce que $2 \cos\left(\frac{2\pi}{m(i,j)}\right)$ tiene que ser un número entero. Los valores $m(i, j)$ que cumplen esta condición son $\{1, 2, 3, 4, 6\}$. ■

Teorema 2.4.4 Sea (W, S) un sistema de Coxeter cuyo grafo de Coxeter asociado es alguno de los siguientes:

$$A_n (n \geq 1), B_n (n \geq 2), D_n (n \geq 4), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$$

Entonces W es un grupo de Weyl.

Demostración. Sea (W, Π) un grupo de Coxeter, con $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ el sistema fundamental asociado. Asignemos sus longitudes como sigue:

$$m(i, j) = 3 \Rightarrow \|\alpha_i\| = \|\alpha_j\|$$

$$m(i, j) = 4 \Rightarrow \|\alpha_i\| = \sqrt{2} \|\alpha_j\| \quad \text{ó} \quad \sqrt{2} \|\alpha_i\| = \|\alpha_j\|$$

$$m(i, j) = 6 \Rightarrow \|\alpha_i\| = \sqrt{3} \|\alpha_j\| \quad \text{ó} \quad \sqrt{3} \|\alpha_i\| = \|\alpha_j\|$$

Luego:

- Las raíces fundamentales de los grupos cuyo grafo de Coxeter es alguno de los siguientes

$$A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$$

tienen la misma longitud.

- Las raíces fundamentales del grupo cuyo grafo de Coxeter es B_n tienen como longitud

$$\sqrt{2} \|\alpha_1\| = \|\alpha_2\| = \dots = \|\alpha_n\|$$

- Las raíces fundamentales del grupo cuyo grafo de Coxeter es G_2 tienen como longitud

$$\sqrt{3} \|\alpha_1\| = \|\alpha_2\|$$

- Las raíces fundamentales del grupo cuyo grafo de Coxeter es F_4 tienen como longitud

$$\|\alpha_1\| = \|\alpha_2\| = \sqrt{2} \|\alpha_3\| = \sqrt{2} \|\alpha_4\|$$

Consideremos el retículo $\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i : k_i \in \mathbb{Z} \right\}$ y probemos que $s_i(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ para toda reflexión fundamental.

Si $m(i, j) = 3$ entonces

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} = -\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{1}{2} \|\alpha_i\|^2$$

Luego si $i \neq j$

$$s_i(\alpha_j) = \alpha_j - 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} \alpha_i = \alpha_j - \alpha_i \in \mathcal{L}$$

y si $i = j$

$$s_i(\alpha_i) = -\alpha_i \in \mathcal{L}$$

De forma análoga se cumple cuando $m(i, j) = 4$ y cuando $m(i, j) = 6$. Entonces para toda reflexión fundamental se cumple por linealidad que $s_i(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, y como $W = \langle s_i : 1 \leq i \leq n \rangle$, entonces se tiene que $\forall w \in W, w(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$. Así W es un grupo de Weyl. ■

Notación 2.4.5 *Notaremos*

$$W(A_n), W(B_n), W(D_n), W(G_2), W(F_4), W(E_6), W(E_7), W(E_8)$$

a los respectivos grupos de Weyl listados en el teorema 2.4.4.

2.5. Construcción de los grupos de Weyl Clásicos

En esta sección construiremos los grupos de Weyl llamados clásicos, es decir los de tipo A_n, B_n y D_n .

2.5.1. Grupo de Weyl de tipo A_n

Consideremos el grupo simétrico \mathcal{S}_{n+1} como un conjunto de transformaciones lineales, $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, que permutan los vectores canónicos e_1, e_2, \dots, e_{n+1} . Consideremos las transposiciones

$$s_1 = (e_1, e_2) \quad s_2 = (e_2, e_3) \quad \cdots \quad s_n = (e_n, e_{n+1})$$

entonces se cumple que

$$\left\{ \begin{array}{l} s_i(e_{i+1} + e_i) = e_i + e_{i+1} \\ s_i(e_{i+1} - e_i) = e_i - e_{i+1} = -(e_{i+1} - e_i) \\ s_i(e_j) = e_j \end{array} \right. \quad \text{si } j \neq i \text{ y } j \neq i + 1 \quad (2.1)$$

Consideremos el hiperplano H y su complemento ortogonal H^\perp

$$H = \langle e_j, e_i + e_{i+1} : 1 \leq j \leq n+1, j \neq i, j \neq i+1 \rangle \quad \text{y} \quad H^\perp = \langle e_{i+1} - e_i \rangle$$

Luego por 2.1 cada transposición s_i es una reflexión según el hiperplano H , cuya raíz asociada es $\alpha_i = e_{i+1} - e_i$. De este modo \mathcal{S}_{n+1} es un subgrupo de $O(\mathbb{R}^{n+1})$ y $\mathcal{S}_{n+1} = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$.

Busquemos un sistema de raíces Δ y un sistema de raíces positivo para el grupo \mathcal{S}_{n+1} . Es claro que $e_{i+1} - e_i \in \Delta$ ($1 \leq i \leq n$) por ser raíces fundamentales. Luego como los sistemas de raíces son estables bajo la acción de W , el sistema de raíces asociado con el grupo \mathcal{S}_{n+1} es

$$\Delta = \{e_i - e_j : i \neq j, 1 \leq i, j \leq n+1\}$$

Denominemos S al subespacio de \mathbb{R}^{n+1} generado por las reflexiones fundamentales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, y \mathcal{A}_n al conjunto

$$\mathcal{A}_n = \{T|_S : T \in \mathcal{S}_{n+1}\}$$

Luego $\mathcal{A}_n \simeq \mathcal{S}_{n+1}$ es efectivo, es decir que \mathcal{A}_n es un grupo de Coxeter con

$$|\mathcal{A}_n| = (n+1)!$$

Sea $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces $x \in S^\perp$ si y sólo si $0 = \langle x; \alpha_m \rangle$ para toda reflexión fundamental $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Entonces $\forall i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq n+1$

$$0 = \langle x, \alpha_m \rangle = \langle x, e_i - e_j \rangle = \lambda_i - \lambda_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \lambda_j$$

por lo que $x = \lambda_1(1, 1, \dots, 1)$, de lo que es fácil deducir que

$$S = \left\{ (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 0 \right\}$$

Ahora bien si $\alpha_m = e_i - e_j \in \Delta$ con $i > j$,

$$\alpha_m = e_i - e_j = \sum_{k=j}^{i-1} e_{k+1} - e_k = \sum_{k=j}^{i-1} \alpha_{k+1}$$

Eligiendo $t \in V$ tal que $\forall i, 1 \leq i \leq n+1$ se cumpla que $\langle t, \alpha_i \rangle > 0$, entonces

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

es un sistema fundamental. Además

$$\Delta^+ = \{e_i - e_j \in \Delta : i > j\} \quad \text{ó} \quad \Delta^+ = \{e_i - e_j \in \Delta : i < j\}$$

Ahora sí estamos en condiciones de determinar el grafo de Coxeter del grupo $\mathcal{A}_n \simeq \mathcal{S}_{n+1}$:

- Si $j \neq i+1$ y $j \neq i$

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} = 0$$

por lo que no hay aristas entre los nodos i y j .

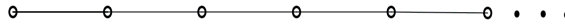
- Si $j = i+1$

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_{i+1}\|} = \frac{\langle e_i - e_{i-1}, e_{i+1} - e_i \rangle}{\|e_i - e_{i-1}\| \|e_{i+1} - e_i\|} = -\frac{1}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned} -\cos\left(\frac{\pi}{m(i,j)}\right) &= \frac{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_{i+1}\|} \\ -\cos\left(\frac{\pi}{m(i,j)}\right) &= -\frac{1}{2} \\ m(i,j) &= 3 \end{aligned}$$

De esta forma el grafo de Coxeter de $\mathcal{A}_n \simeq \mathcal{S}_{n+1}$ es A_n



2.5.2. Grupo de Weyl de tipo B_n

Comencemos considerando dos subgrupos de $O(\mathbb{R}^n)$:

1. El primer subgrupo es el grupo simétrico $\mathcal{S}_n = \langle s_2, \dots, s_n \rangle$ siendo s_i la reflexión con raíz asociada $\alpha_i = e_i - e_{i-1}$.
2. El segundo subgrupo es $\mathcal{H}_n = \langle s_{e_1}, s_{e_2}, \dots, s_{e_n} \rangle$, siendo

$$s_{e_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad / \quad s_{e_i}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1, \dots, -\lambda_i, \dots, \lambda_n)$$

Este subgrupo es abeliano, y

$$\mathcal{H}_n \simeq \{1, s_{e_1}\} \times \dots \times \{1, s_{e_n}\}$$

por lo que $|\mathcal{H}_n| = 2^n$.

Dado $J \subseteq \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ definimos la transformación

$$f_J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad / \quad f_J(e_i) = \begin{cases} -e_i & \text{si } e_i \in J \\ e_i & \text{si } e_i \notin J \end{cases}$$

Es claro que $f_J = \prod_{e_i \in J} s_{e_i}$, por lo que

$$\mathcal{H}_n = \{f_J : J \subseteq \{e_1, e_2, \dots, e_n\}\}$$

y como $f_J \circ f_L = f_{J \Delta L}$, \mathcal{H}_n es un subgrupo de $O(\mathbb{R}^n)$.

Veamos como interactúan \mathcal{S}_n y \mathcal{H}_n . Sea $f_J \in \mathcal{H}_n$ y $T \in \mathcal{S}_n$ tal que $T(e_i) = e_j$.

- Si $e_j \in J$

$$(T \circ f_J \circ T^{-1})(e_i) = (T \circ f_J \circ T^{-1}) \circ T(e_j) = T \circ f_J(e_j) = T(-e_j) = -e_i$$

- Si $e_j \notin J$

$$(T \circ f_J \circ T^{-1})(e_i) = e_i$$

De esta forma $T \circ f_J \circ T^{-1} = f_{T(J)}$ y entonces $\mathcal{H}_n \triangleleft \mathcal{S}_n$.

Definamos el grupo $\mathcal{B}_n = \langle \mathcal{H}_n \cup \mathcal{S}_n \rangle$, entonces:

1. $|\mathcal{B}_n| = 2^n n!$
2. Para todo elemento $r \in \mathcal{B}_n$ existen únicos $f_J \in \mathcal{H}_n$ y $T \in \mathcal{S}_n$ tal que $r = f_J \circ T$
3. Sean $r, w \in \mathcal{B}_n$, entonces

$$\begin{aligned} rw &= (f_{J_1} \circ T_1) \circ (f_{J_2} \circ T_2) = f_{J_1} \circ T_1 \circ f_{J_2} \circ T_1^{-1} \circ T_1 \circ T_2 = \\ &= f_{J_1} \circ f_{T(J_2)} \circ T_1 \circ T_2 = f_{J_1 \Delta T_1(J_2)} \circ T_1 \circ T_2 \end{aligned}$$

4. Llamemos $f_i = f_{\{e_i\}} = S_{e_i}$. Luego

$$T_i \circ f_1 \circ T_i^{-1} = f_{T_i(e_1)} = f_{\{e_j\}} = f_j$$

y de esta forma $\mathcal{B}_n = \langle s_{e_1}, s_2, \dots, s_n \rangle$.

Busquemos un sistema de raíces para \mathcal{B}_n ; como los sistemas de raíces son estables por la acción del grupo, resulta que:

$$\Delta = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_i \pm e_j : i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

Es fácil comprobar que

$$e_i = \sum_{k=1}^i \alpha_k$$

$$e_i - e_j = \sum_{k=j}^{i-1} \alpha_{k+1}$$

$$e_i + e_j = 2 \sum_{k=1}^j \alpha_k + \sum_{k=j}^{i-1} \alpha_{k+1}$$

Eligiendo $t \in V$ tal que $\forall i, 1 \leq i \leq n$ se cumpla que $\langle t, \alpha_i \rangle > 0$, entonces

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

es un sistema fundamental, así \mathcal{B}_n es un grupo de Coxeter.

Ahora sí estamos en condiciones de determinar el grafo de Coxeter del grupo \mathcal{B}_n :

- Si $j \neq i + 1$ y $j \neq i$

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|} = 0$$

por lo que no hay aristas entre los nodos i y j .

- Si $j = i + 1$

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_{i+1}\|} = \frac{\langle e_i - e_{i-1}, e_{i+1} - e_i \rangle}{\|e_i - e_{i-1}\| \|e_{i+1} - e_i\|} = -\frac{1}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned} -\cos\left(\frac{\pi}{m(i, j)}\right) &= \frac{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_{i+1}\|} \\ -\cos\left(\frac{\pi}{m(i, j)}\right) &= -\frac{1}{2} \\ m(i, j) &= 3 \end{aligned}$$

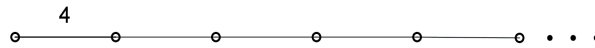
- Si

$$\frac{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_1\| \|\alpha_2\|} = \frac{\langle e_1, e_2 - e_1 \rangle}{\|e_1\| \|e_2 - e_1\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego

$$\begin{aligned} -\cos\left(\frac{\pi}{p_{12}}\right) &= \frac{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_1\| \|\alpha_2\|} \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p_{12}}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ p_{12} &= 4 \end{aligned}$$

De esta forma el grafo de Coxeter de \mathcal{B}_n es B_n



2.5.3. Grupo de Weyl de tipo D_n

Comencemos considerando dos subgrupos de $O(\mathbb{R}^n)$:

1. El primer subgrupo es el grupo simétrico $\mathcal{S}_n = \langle s_2, \dots, s_n \rangle$ siendo s_i la reflexión con raíz asociada $\alpha_i = e_i - e_{i-1}$.
2. El segundo subgrupo es el subgrupo de \mathcal{H}_n , dado por

$$\mathcal{L}_n = \{f_J \in \mathcal{H}_n : |J| \text{ es par}\}$$

\mathcal{L}_n es normalizado por \mathcal{H}_n . Consideremos el subgrupo de $O(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{D}_n = \langle \mathcal{L}_n \cup \mathcal{H}_n \rangle = \langle f_J \cdot T : f_J \in \mathcal{L}_n, T \in \mathcal{S}_n \rangle$$

Sea $\alpha_1 = e_1 + e_2$ y $\alpha_i = e_i - e_{i-1}$ con $2 \leq i \leq n$, y denominemos $s_j \in \mathcal{D}_n$ a la reflexión asociada con la raíz α_j , con $1 \leq j \leq n$. Observemos que

$$\mathcal{L}_n = \langle s_{e_i} s_{e_j} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \rangle$$

pues cada transformación que cambie una cantidad par de signos negativos, puede conseguirse por sucesivas transformaciones que cambien dos signos. Luego

$$\mathcal{D}_n = \{s_{e_i + e_j} : i \neq j\}$$

Dado $i \neq j$, elegimos $T \in \mathcal{S}_n$ tal que $T(e_1) = e_i$ y $T(e_2) = e_j$. Entonces por propiedades de las reflexiones tenemos

$$\begin{aligned} T \circ s_{e_1 + e_2} \circ T^{-1}(e_i + e_j) &= T \circ s_{e_1 + e_2} \circ T^{-1} \circ T(e_1 + e_2) = T \circ s_{e_1 + e_2}(e_1 + e_2) \\ &= T(-e_1 - e_2) = -e_i - e_j = T(-e_1 - e_2) = -e_i - e_j \end{aligned}$$

es decir, $T \circ s_{e_1 + e_2} \circ T^{-1} = s_{e_i + e_j}$.

También si $i \neq j$, entonces $s_{e_i - e_j} \in \mathcal{S}_n$ y es fácil comprobar que

$$s_{e_i - e_j} \circ s_{e_i + e_j} = s_{e_i} \circ s_{e_j}$$

De esta forma $\mathcal{D}_n = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$.

Aplicando todas las permutaciones $\{e_i\}$ a las raíces $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ seguida de una cantidad par de cambios de signos, determinamos que un sistema de raíces de \mathcal{D}_n es

$$\Delta = \{e_i \pm e_j : i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

Luego debido a que

$$e_i - e_j = \sum_{k=j}^{i-1} \alpha_{k+1} \quad \text{si } i > j$$

$$e_i + e_1 = \alpha_1 + \sum_{k=3}^i \alpha_k \quad \text{si } i \neq j$$

$$e_i + e_2 = \sum_{k=1}^i \alpha_k \quad \text{si } i > 2$$

$$e_i + e_j = \alpha_1 + \alpha_2 + 2 \sum_{k=3}^j \alpha_k + \sum_{k=j}^{i-1} \alpha_{k+1} \quad \text{si } 2 < j < i$$

entonces $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es un sistema fundamental para \mathcal{D}_n .

Ahora sí estamos en condiciones de determinar el grafo de Coxeter de grupo \mathcal{D}_n :

- No hay arista entre los nodos 1 y 2, pues $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$
- $m(i, j) = 3$ con $i > 2$ y $j = i + 1$, pues

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_{i+1}\|} = \frac{\langle e_i - e_{i-1}, e_{i+1} - e_i \rangle}{\|e_i - e_{i-1}\| \|e_{i+1} - e_i\|} = -\frac{1}{2}$$

Como

$$-\cos\left(\frac{\pi}{m(i, j)}\right) = \frac{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_{i+1}\|} = -\frac{1}{2}$$

debe ser $m(i, j) = 3$.

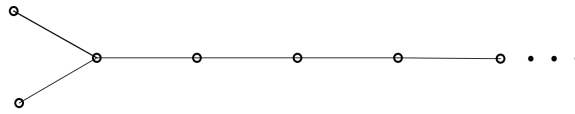
- $p_{13} = 3$ pues

$$\frac{\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle}{\|\alpha_1\| \|\alpha_3\|} = \frac{\langle e_1 + e_2, e_3 - e_2 \rangle}{\|e_1 + e_2\| \|e_3 - e_2\|} = -\frac{1}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 -\cos\left(\frac{\pi}{p_{13}}\right) &= \frac{\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle}{\|\alpha_1\| \|\alpha_3\|} \\
 -\cos\left(\frac{\pi}{p_{13}}\right) &= -\frac{1}{2} \\
 p_{13} &= 3
 \end{aligned}$$

Así el grafo de Coxeter del grupo \mathcal{D}_n es D_n



A continuación enunciaremos un teorema que caracteriza a los subgrupos finitos de reflexiones de $O(V)$.

Teorema 2.5.1 *Si W es un subgrupo finito de $O(V)$ generado por reflexiones, entonces V puede descomponerse como*

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

de modo que:

1. Si $W_i = \{w|_{V_i} : w \in W\}$ entonces W_i es un subgrupo de W y W es isomorfo al producto directo

$$W_0 \times W_1 \times \cdots \times W_k.$$

2. W_0 es el grupo trivial en V_0 .
3. Para $i \geq 1$, W_i es isomorfo con alguno de los grupos finitos de reflexiones listados en el teorema 2.3.10.
4. W es un grupo de Coxeter si y sólo si $V_0 = 0$.
5. W es un grupo de Weyl si y sólo si H_2^n ($n \geq 3, n \neq 6$), I_3, I_4 no aparecen en la descomposición.

Demostración. Ver [16] pág. 76. ■

2.6. Polinomios invariantes

Sea $G \subseteq GL_n(\mathbb{k})$ un grupo actuando en el anillo de polinomios $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Un polinomio f es invariante para G , si $\forall g \in G, gf = f$. No es difícil de comprobar que el conjunto de polinomios invariantes forma una subálgebra de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. En general, no es una tarea sencilla caracterizar la subálgebra de polinomios invariantes para un grupo G dado. Uno de los problemas clásicos de la teoría de invariantes en el siglo XIX, fue determinar un sistema de generadores para el conjunto de polinomios invariantes.

Si G es un grupo de reflexiones de $O(V)$, existen $n = \dim(V)$ generadores algebraicamente independientes del álgebra de invariantes, según lo establece el teorema de Chevalley y otros. En esta sección presentaremos las principales propiedades del álgebra de invariantes de un grupo finito de reflexiones.

2.6.1. Álgebra de invariantes

Sea \mathbb{k} un cuerpo de característica cero y V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión finita. Consideremos G un subgrupo del grupo $GL(V)$. Denotemos \mathcal{P} el álgebra simétrica $S(V^*)$ del espacio dual de V . Si fijamos una base de V , \mathcal{P} puede ser identificada con el anillo de polinomios $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, donde x_1, \dots, x_n es la base dual asociada a la base fijada. En adelante no haremos distinción entre \mathcal{P} y el anillo de polinomios $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$.

Notaremos con \mathcal{H}_d al subespacio de \mathcal{P} formado por polinomios homogéneos de grado d .

Es claro que \mathcal{P} es un álgebra graduada

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i$$

siendo $\mathcal{H}_0 \simeq \mathbb{k}$ y $\mathcal{H}_1 \simeq V^*$.

La acción natural de $GL(V)$ en \mathcal{P} está dada por:

$$(g * f)(v) = f(g^{-1}(v)) \quad (g \in GL(V), f \in \mathcal{P})$$

Mientras no haya lugar a confusión, notaremos gf para indicar $g * f$.

Definición 2.6.1 Sea G un subgrupo de $GL(V)$ y $f \in \mathcal{P}$, diremos que f es un **polinomio invariante** para G si $\forall g \in G, gf = f$. Notaremos $\mathcal{I}(G)$ al conjunto de polinomios invariantes de G .

Observemos que $\mathcal{I}(G)$ es una subálgebra de \mathcal{P} , y el conjunto de polinomios invariantes homogéneos de grado d , queda determinado por $\mathcal{I}_d(G) = \mathcal{I}(G) \cap \mathcal{H}_d$. Luego es claro que el álgebra de invariantes es graduada

$$\mathcal{I}(G) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{I}_i(G)$$

Consideremos la aplicación lineal $M_G : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ definida como:

$$M_G(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf$$

Proposición 2.6.2 Sea G un subgrupo de $GL(V)$ y consideremos la aplicación lineal M_G definida anteriormente. Se cumplen:

1. $M_G(\mathcal{H}_d) = \mathcal{I}_d(G)$.
2. $(M_G)^2 = M_G$

Notar que M_G es un proyector de \mathcal{P} en $\mathcal{I}(G)$.

Demostración. Ver [16], pág. 108. ■

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{I}^+(G) = \{f \in \mathcal{I}(G) : f \text{ es homogéneo, } gr(f) > 0\}$$

y sea J el ideal generado por $\mathcal{I}^+(G)$, así

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^k g_i f_i : k \in \mathbb{N}, g_i \in \mathcal{P} \text{ y } f_i \in \mathcal{I}^+(G) \right\}$$

Nuestro interés radica en caracterizar el conjunto de polinomios invariantes para un grupo de reflexiones. En adelante consideramos G un grupo de reflexiones.

Por el Teorema de Bases de Hilbert, el anillo de polinomios \mathcal{P} es noetheriano, por lo que el ideal J es finitamente generado. Llamaremos sistema de **generadores básico** de J , a un conjunto de generadores $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ siendo m minimal, es decir no existe un conjunto de generadores de J con menos de m polinomios.

Teorema 2.6.3 *Si $\{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset \mathcal{I}^+(G)$ es un sistema de generadores básico del ideal J , entonces f_1, f_2, \dots, f_m son algebraicamente independientes sobre \mathbb{R} .*

Demostración. Ver [16], pág. 110. ■

Teorema 2.6.4 (Shephard y Todd, Chevalley) *Sea $G \subset O_n(\mathbb{R})$ un grupo de reflexiones. Todo polinomio invariante para G es un polinomio con coeficientes en \mathbb{R} en los generadores básicos f_1, f_2, \dots, f_m , es decir*

$$\mathcal{I}(G) = \mathbb{R}[f_1, f_2, \dots, f_m]$$

Demostración. Ver [16], pág. 111. ■

Teorema 2.6.5 *El número de generadores básicos es igual a la dimensión de V .*

Demostración. Ver [16] pág. 111. ■

2.6.2. Serie de Poincaré

Una manera práctica de obtener información sobre la estructura del álgebra de invariantes es utilizando su serie de Poincaré. Un \mathbb{k} -espacio vectorial graduado $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} M_i$ se dice de **tipo finito**, si $\dim_{\mathbb{k}}(M_i) < \infty$ para todo i .

Definición 2.6.6 *Sea M un \mathbb{k} -espacio vectorial graduado de tipo finito, definimos su **Serie de Poincaré** como*

$$P_t(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{k}}(M_i) t^i$$

Un teorema de Molien establece una útil descripción de la serie de Poincaré del álgebra de invariantes.

Teorema 2.6.7 (Molien) *Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial y $G \subset GL(V)$ un subgrupo finito tal que $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$. Entonces*

$$P_t(\mathcal{I}(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - g^{-1}t)}$$

Demostración. Ver [24] pág. 185. ■

Utilizando el teorema de Molien se obtienen los siguientes dos resultados:

1. Sean d_1, d_2, \dots, d_n los grados de los generadores básicos, entonces

$$|G| = \prod_{i=1}^n d_i$$

2. El número de reflexiones en G es $\prod_{i=1}^n (d_i - 1)$.

Los números d_1, \dots, d_n no dependen de los generadores básicos considerados y son llamados los **grados** de W y los números $d_1 - 1, \dots, d_n - 1$ se llaman los **exponentes** de W .

Demostración. Ver [24] pág. 187. ■

Teorema 2.6.8 (Shephard y Todd) *Todo G subgrupo finito de $GL(V)$ cuya álgebra de invariantes sea un anillo de polinomios, es un grupo de reflexiones.*

Demostración. Ver [16], pág. 117. ■

2.6.3. Grado falso

Sean G un grupo de reflexiones y \mathcal{P} el álgebra de funciones polinomiales en V a valores complejos. Indicamos con $\mathcal{I}(G) = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ la subálgebra de polinomios G -invariantes, donde asumimos que los polinomios f_i son homogéneos, pues pueden elegirse de este modo.

Definición 2.6.9 *El álgebra cociente $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}/J$, siendo $J = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ el ideal generado por los G -invariantes de grado positivo, se denomina **álgebra de covariantes***

Claramente $\overline{\mathcal{P}}$ es un álgebra graduada

$$\overline{\mathcal{P}} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{J}_i$$

siendo $\mathcal{J}_i = \mathcal{H}_i/J$ componentes G -invariantes homogéneas.

Teorema 2.6.10 (Chevalley-Serre) *Un subgrupo finito G de $GL(V)$ es generado por reflexiones si y sólo si la acción de G en el álgebra de covariantes $\overline{\mathcal{P}}$ es isomorfa a la representación regular de G .*

Demostración. Ver [24] pág.247. ■

Sea ρ una representación irreducible de G y sean $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_l$ los grados de las componentes homogéneas \mathcal{J}_i de $\overline{\mathcal{P}}$, contados con multiplicidad, que contienen una subrepresentación isomorfa a ρ .

Definición 2.6.11 *Se denomina **grado falso** de la representación ρ , al polinomio*

$$f_\rho(t) = \sum_{i=1}^l t^{r_i}$$

Proposición 2.6.12 *Sea G un grupo de reflexiones, ρ una representación de G y χ su carácter. Entonces el grado falso de ρ puede ser calculado como:*

$$f_\rho(t) = \frac{1}{|G|} \prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i}) \sum_{g \in G} \frac{\chi(g)}{\det(1 - gt)}$$

donde d_i con $1 \leq i \leq n$ son los grados G .

Proposición 2.6.13 Ver [11].

El grado falso de las representaciones irreducibles han sido calculados para varios grupos finitos de Coxeter. Steinberg calculó el grado falso para las representaciones irreducibles de los grupos de Weyl de tipo A_n , mientras que Lusztig y otros calcularon el grado falso para algunos de los restantes grupos de Coxeter. Nosotros reproduciremos la fórmula para el grado falso de las representaciones irreducibles de los grupos de Weyl clásicos, presentadas en [29].

1. **Grado falso para el grupo de Weyl de tipo A_n :** Es conocido que las representaciones irreducible de $W(A_n) \simeq \mathcal{S}_{n+1}$ estan en correspondencia biyectiva con las particiones de $n + 1$,

$$\alpha : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_m \geq 0$$

con $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i = n + 1$. Para una partición α definimos $\lambda_i = \alpha_i - i + m$, entonces el grado falso correspondiente a la representación ρ_α esta dada por

$$f_{\rho_\alpha}(t) = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} (t^i - 1)}{t \binom{m-1}{2}^+ \binom{m-2}{2}^+ \cdots^+} \cdot \frac{\prod_{\lambda_i > \lambda_j} (t^{\lambda_i} - t^{\lambda_j})}{\prod_{\lambda_j} \prod_{i=1}^{\lambda_j} (t^i - 1)}$$

2. **Grado falso para el grupo de Weyl de tipo B_n :** Las representaciones irreducibles de $W(B_n)$ estan en correspondencia biyectiva con pares $(\rho_\alpha, \rho_\beta)$ de representaciones irreducibles de \mathcal{S}_l y \mathcal{S}_k , con $k+l = n$. Para las particiones

$$\alpha : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_m \geq 0 \quad \text{y} \quad \beta : \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_{\tilde{m}} \geq 0$$

de k y l respectivamente, definimos

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \alpha_i - i + m & \text{con} & \quad 1 \leq i \leq m \\ \mu_i &= \beta_i - i + \tilde{m} & \text{con} & \quad 1 \leq i \leq \tilde{m} \end{aligned}$$

Entonces el grado falso de la representación $\rho_{\alpha,\beta}$, correspondiente al par $(\rho_\alpha, \rho_\beta)$, esta dada por

$$f_{\rho_{\alpha,\beta}}(t) = \frac{t^{|\beta|} \prod_{i=1}^n (t^{2i} - 1)}{t^{\binom{m-2}{i=1}} \cdot t^{\binom{\tilde{m}-2}{i=1}}} \cdot \frac{\prod_{\lambda_i > \lambda_j} (t^{2\lambda_i} - t^{2\lambda_j})}{\prod_{\lambda_j} \prod_{i=1}^{\lambda_j} (t^{2i} - 1)} \cdot \frac{\prod_{\mu_i > \mu_j} (t^{2\mu_i} - t^{2\mu_j})}{\prod_{\mu_j} \prod_{i=1}^{\mu_j} (t^{2i} - 1)}$$

3. **Grado falso para el grupo de Weyl de tipo D_n :** El grupo $W(D_n)$ es un subgrupo de $W(B_n)$, de índice 2. Es conocido que todas las representaciones irreducibles de $W(D_n)$ se obtienen como restricciones de las representaciones irreducibles de $W(B_n)$. Sea $\rho_{\alpha,\beta}$ una representación irreducible de $W(B_n)$, entonces $\tilde{\rho}_{\alpha,\beta} = \rho_{\alpha,\beta} \downarrow W(D_n)$ es una representación irreducible de $W(D_n)$ si $\alpha \neq \beta$; y si $\alpha = \beta$, $\tilde{\rho}_{\alpha,\alpha}$ se parte en dos representaciones irreducibles $\tilde{\rho}_{1\alpha,\alpha}$ y $\tilde{\rho}_{2\alpha,\alpha}$.

El grado falso de las representaciones irreducibles de $W(D_n)$ es:

$$f_{\tilde{\rho}_{1\alpha,\alpha}}(t) = f_{\tilde{\rho}_{2\alpha,\alpha}}(t) = \frac{(t^n - 1) f_{\rho_{\alpha,\alpha}}(t)}{t^{2n} - 1}$$

y

$$f_{\tilde{\rho}_{\alpha,\beta}}(t) = \frac{(t^n - 1) (f_{\rho_{\alpha,\beta}}(t) + f_{\rho_{\alpha,\beta}}(t))}{t^{2n} - 1}$$

Para una representación irreducible ρ de un grupo de Coxeter G , podemos descomponer el grado falso como

$$f_\rho(t) = t^{m(\rho)} g_\rho(t)$$

tal que el término constante de $g_\rho(t)$ es no nulo.

El siguiente lema, se utilizará en el próximo capítulo con el tratamiento de modelos polinomiales para grupos de Coxeter.

Lema 2.6.14 *Si G es $W(A_n)$, $W(B_n)$ ó $W(D_{2n+1})$ entonces el término constante del polinomio $g_\rho(t)$ es 1 para toda ρ representación irreducible de G . En el caso de $W(D_{2n})$ existen representaciones irreducibles tal que el término constante de $g_\rho(t)$ es 2.*

Demostración. Ver [35] pág. 6. ■

Capítulo 3

Modelos de Gelfand

Definición 3.0.15 *Sea G un grupo finito. Un **modelo de Gelfand** para G es una representación lineal de G sobre \mathbb{C} , cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles de G .*

Hay una extensa bibliografía sobre modelos de Gelfand para diferentes clases de grupos finitos. Nuestro interés se centra en modelos de Gelfand para grupos de reflexiones.

A mediados de la década del 70' Bernstein I. - Gelfand I. - Gelfand S. establecen en [10] que el espacio $L^2(S^2)$ de las funciones de cuadrado integrable sobre la esfera S^2 se descomponen como la suma de SO_3 -módulos irreducibles, de modo que todos los módulos irreducibles aparecen exactamente una vez en esta descomposición. Estos autores introducen el concepto de modelo en el caso de grupos compactos y presentan modelos para los grupos de Lie semisimples compactos.

Posteriormente, en 1984, Klyachko presenta en [26] una construcción de modelos para el grupo lineal general sobre un cuerpo finito. En este caso Klyachko presenta una familia de subgrupos G_k con $0 \leq 2k \leq n$ cada uno de ellos asociados a un carácter lineal χ_k , definido como el carácter de Gelfand-Graev en un subgrupo de G_k . El resultado de Klyachko es:

$$\sum_k \chi_k \uparrow G = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi$$

donde \widehat{G} indica el conjunto de caracteres irreducibles ordinarios de G . Es claro que Klyachko construye los modelos como suma de representaciones inducidas por caracteres lineales de ciertos subgrupos del grupo lineal. Para establecer esto, Klyachko estudia los morfismos entre los distintos módulos inducidos.

A partir de este trabajo, distintos autores desarrollan la construcción de modelos, llamados también modelos de Gelfand, para grupos finitos, particularmente para el grupo simétrico y productos semidirectos con este.

En 1991 Inglis y Saxl, usando la clasificación de los caracteres irreducibles de $GL(n, \mathbb{F}_q)$ presentan en [22] otra demostración del resultado obtenido por Klyachko, identificando las componentes irreducibles de cada carácter $\chi_k \uparrow G$.

Más recientemente Kodiyalam y Verma presentan en [27] un modelo de Gelfand para el grupo simétrico a través de una acción del grupo sobre sus involuciones. Esta construcción es natural si se tiene en cuenta que la dimensión de un modelo Gelfand coincide con el número de involuciones del grupo.

También destacamos el modelo dado por Adin, Postnikov y Roichman en [1] para el grupo de reflexiones de tipo $G(m, 1, n)$, y las construcciones de Soto Andrade y Pantoja en [33], de modelos de Gelfand geométricos para el grupo de Heisenberg y un grupo de movimientos rígidos.

En el caso de grupos de reflexiones, se tiene una representación canónica llamada la *representación geométrica* del grupo G . Al menos, un par de resultados relativos a las representaciones de G , sugieren profundizar el análisis de las representaciones obtenidas desde la acción natural del grupo sobre las funciones polinomiales definidas en el espacio de la representación geométrica. Chevalley, Shephard-Todd, Steinberg en [36] y otros, establecieron relaciones entre el hecho que G sea un grupo de reflexiones y ciertas características del espacio \mathcal{H}_G de polinomios G -armónicos, demostrando que \mathcal{H}_G contiene un modelo de Gelfand para G .

Macdonald encuentra representaciones irreducibles de un grupo de Weyl asociadas con los sistemas de raíces de sus subgrupos de reflexiones y que naturalmente pueden ser realizadas en el espacio de polinomios G -armónicos. Estas representaciones se conocen como representaciones de Macdonald. Ver [30].

Posteriormente Aguado y Araujo en [4], asocian con cada subgrupo finito $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ un espacio \mathcal{N}_G del álgebra de polinomios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, que contiene

un modelo de Gelfand de G . Este espacio, llamado el modelo polinomial, resulta ser un modelo de Gelfand para ciertos grupos de Weyl. En [3], [2] y [5] se establece que \mathcal{N}_G es un modelo de Gelfand para los grupos de Weyl de tipo A_n, B_n y D_{2n+1} .

A continuación presentaremos dos construcciones de modelos de Gelfand para grupos finitos, el modelo por involuciones, el cuál está asociado con ciertos módulos inducidos, y el modelo polinomial, que esta asociado con la representación geométrica de G .

3.1. El modelo por involuciones

Por un lado Klyachko y por otro Inglis, Richardson y Saxl, encuentran una identidad que permite describir un modelo de Gelfand asociado con el grupo simétrico. Podría ponerse así:

$$\chi_{C_k} \uparrow \mathcal{S}_n = \sum \chi_\lambda$$

donde C_k es el centralizador de una involución en \mathcal{S}_n con exactamente k puntos fijos, χ_{C_k} es un carácter lineal de C_k , χ_λ es un carácter irreducible de \mathcal{S}_n asociado con una partición λ de n con exactamente k términos impares. De esta identidad se sigue inmediatamente que:

$$\sum_k \chi_{C_k} \uparrow \mathcal{S}_n = \sum_\lambda \chi_\lambda$$

donde los centralizadores C_k se corresponden con involuciones en distintas clases de conjugación.

Más adelante, Baddeley (1990) llamaría a este tipo de modelos: modelos por involuciones y probaría que si H es un grupo finito que admite un modelo por involuciones, entonces el producto semidirecto $H^n \times_s \mathcal{S}_n$ admite un modelo por involuciones.

El resultado de Baddeley da lugar a la existencia de modelos por involuciones para grupos de Weyl clásicos, con la excepción del grupo de tipo D_{2n} . Un modelo por involuciones para un grupo de Weyl de tipo A_n es presentado en [21] por Inglis, Richardson y Saxl; y para un grupo de Weyl de tipo B_n en [6] y en [34]. En [6], Baddeley presenta un modelo por involuciones para un grupo de Weyl de

tipo D_{2n+1} , y en [7] demuestra que no existe un modelo por involuciones para un grupo de Weyl de tipo D_{2n} con $n \geq 2$. En [6] se menciona que no es difícil comprobar que existe un modelo por involuciones para el grupo de Weyl de tipo G_2 , así como también que ha sido chequeado utilizando software, que no existen modelos de este tipo para los grupos de Weyl excepcionales de tipo F_4, E_6, E_7 y E_8 . En [38] Vinroot investiga la existencia de modelos por involuciones para grupos de Coxeter irreducibles no cristalográficos, mostrando la existencia del modelo para los grupos de tipo H_2^n ($n \geq 3, n \neq 6$) y I_3 , y presentando una demostración conceptual de la inexistencia del modelo para el grupo de tipo I_4 .

Más recientemente, en [31] se estudian los *modelos por involuciones generalizados* para incluir en el tratamiento algunos casos de grupos de reflexiones unitarias.

3.1.1. Definición del modelo

Sea G un grupo finito tal que toda representación compleja irreducible de G es realizada sobre los números reales; y sean $1 = c_1, c_2, \dots, c_r$ representantes de las clases de conjugación de G tal que $c_i^2 = 1$. Notemos como $C_G(c_i)$ al centralizador de c_i en G . Utilizando la proposición 1.10.3

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) = |\{g \in G : g^2 = 1\}| = \sum_{i=1}^r [G : C_G(c_i)]$$

Definición 3.1.1 Sea ψ_i un carácter lineal de $C_G(c_i)$. Diremos que el conjunto de caracteres $\{\psi_i\}_{i=1}^r$ es un **modelo por involuciones** de G si

$$\sum_{i=1}^r (\psi_i \uparrow G) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi$$

es decir, $\{\psi_i\}_{i=1}^r$ es un modelo por involuciones si cada carácter inducido $\psi_i \uparrow G$ es libre de multiplicidad, y dos a dos sin constituyentes comunes.

Si G es un grupo de Coxeter finito, entonces todas las representaciones irreducibles ordinarias de G , pueden realizarse sobre los números reales (ver [8]). Por

lo que podemos preguntarnos si existe un modelo por involuciones para cada uno de ellos.

Todo grupo de Coxeter finito es isomorfo a un producto directo de grupos de Coxeter irreducibles, los cuales ya hemos clasificados. Sea G un grupo de Coxeter

$$G \simeq \bigoplus_{i=1}^k G_i$$

siendo cada G_i un grupo de Coxeter finito irreducible, entonces las involuciones de G son k -uplas ordenadas, donde el i -ésimo lugar está formado por una involución de G_i . El centralizador de G está formado por el producto de los correspondientes G_i -centralizadores, y todas las representaciones irreducibles de G son productos tensoriales de las representaciones irreducibles de los G_i . Esto conduce al siguiente resultado.

Lema 3.1.2 *Sea G un grupo finito isomorfo a un producto directo de grupos finitos,*

$$G \simeq \bigoplus_{i=1}^k G_i$$

Entonces G admite un modelo por involuciones si y sólo si cada G_i admite un modelo por involuciones.

A partir de este lema y de los resultados obtenidos por Inglis, Richardson, Saxl, Baddeley y Vinroot, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.1.3 *Sea G un grupo de Coxeter, entonces G admite un modelo por involuciones si y sólo si cada factor irreducible de G es un grupo de Coxeter de tipo A_n, B_n, D_{2n+1}, G_2 ó I_3 .*

Demostración. [38] pág. 2. ■

Con este teorema se concluye el estudio de modelos por involuciones en la familia de grupos de Coxeter.

3.2. El modelo polinomial

3.2.1. El espacio \mathcal{N}_G

En esta sección, G denotará un subgrupo finito de $GL_n(\mathbb{C})$. Para un conjunto finito A , indicaremos con \mathcal{S}_A el grupo simétrico de A , y con

$$\mathcal{M}_A = \{\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{N}_0\}$$

el conjunto de funciones multi-índices. En el caso que A sea el conjunto

$$\mathbf{I}_n = \{1, \dots, n\}$$

usaremos \mathcal{S}_n por \mathcal{S}_A y \mathcal{M}_n por \mathcal{M}_A . Por cuestiones de simplicidad, en lo que sigue utilizaremos las siguientes notaciones. Dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n$,

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha(i) \quad , \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ |\alpha| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad , \quad \alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i! \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} &= \beta! \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i} \end{aligned}$$

Sea \mathcal{A} el álgebra de Weyl, conformada por los operadores diferenciales en \mathcal{P} con coeficientes polinomiales. Es conocido (ver [9]) que cada elemento $D \in \mathcal{A}$ puede escribirse de manera única como una suma finita

$$D = \sum \lambda_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta$$

siendo $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n$ y

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \\ \partial^\beta &= \partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} \dots \partial_n^{\beta_n} \end{aligned}$$

Se define el grado de D como

$$\text{grad}(D) = \text{máx} \left\{ \sum_i (\alpha_i - \beta_i) : \lambda_{\alpha, \beta} \neq 0 \right\}$$

El álgebra de Weyl es un álgebra graduada $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_i$, considerando

$$\mathcal{A}_i = \left\{ \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n} \lambda_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta : |\alpha| - |\beta| = i \right\}$$

La acción de G en \mathcal{P} induce una acción de G en el anillo de endomorfismos $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$, que definimos de la siguiente manera:

$$(g \cdot D)(p) = (gDg^{-1})(p) \quad \text{donde } g \in G \text{ y } D \in End_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$$

Luego podemos restringir esta acción al álgebra de Weyl \mathcal{A} ; notemos que cada \mathcal{A}_i es invariante bajo la acción de G .

Sea \mathcal{I}_G la subálgebra de operadores G -invariantes en \mathcal{A} , es decir

$$\mathcal{I}_G = \{D \in \mathcal{A} : g \cdot D = D, \forall g \in G\}$$

Observemos que el conjunto \mathcal{I}_G coincide con el centralizador de G en $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$.

Sea \mathcal{I}_G^- el subespacio del álgebra de Weyl, formado por todos los operadores G -invariantes, de grado negativo

$$\mathcal{I}_G^- = \{D \in \mathcal{I}_G : \text{grad}(D) < 0\} \tag{3.1}$$

Consideremos el subespacio \mathcal{N}_G de \mathcal{P} definido como

$$\mathcal{N}_G = \{p \in \mathcal{P} : D(p) = 0, \forall D \in \mathcal{I}_G^-\}$$

\mathcal{N}_G resulta ser un G -módulo.

Definición 3.2.1 \mathcal{N}_G se dirá el *modelo polinomial* de G .

A continuación enunciaremos algunas propiedades de \mathcal{N}_G .

Teorema 3.2.2 \mathcal{N}_G es de dimensión finita y todo G -módulo simple de $\mathbb{k}[G]$ tiene una copia en \mathcal{N}_G .

Demostración. Ver [4] pág. 38. ■

Corolario 3.2.3 *Supongamos que la acción de G es irreducible. Sea H un subgrupo de G tal que existe una forma lineal invariante por H . Entonces*

$$\dim(\mathcal{N}_G) \leq \left(\frac{|G|}{|H|}\right)^n$$

Demostración. Ver [4] pág. 38. ■

Para algunos grupos, el modelo polinomial puede ser un modelo de Gelfand. El siguiente resultado, debido a Shipard y Oesterlé, apunta al análisis del modelo polinomial en el caso de grupos de Coxeter a través del grado falso.

Teorema 3.2.4 *Sea G un subgrupo finito de $GL_n(\mathbb{C})$ y \mathcal{N}_G como antes. Para una representación irreducible ρ de G , notamos $m(\rho)$ al número entero más pequeño tal que ρ es subrepresentación en $\mathcal{P}_{m(\rho)}$, y C_ρ es la componente isotópica en $\mathcal{P}_{m(\rho)}$. Entonces*

$$\mathcal{N}_G = \bigoplus_{\rho} C_\rho$$

Demostración. Ver [35] pág. 3. ■

Una interesante consecuencia del teorema anterior es el siguiente resultado:

Corolario 3.2.5 *El espacio \mathcal{N}_G es un modelo de Gelfand para G si y sólo si cada representación irreducible ρ de G tiene multiplicidad 1 en la primer componente homogénea de \mathcal{P} donde ρ ocurre.*

Demostración. Ver [35] pág. 3. ■

El lema a continuación es sólo de carácter técnico.

Lema 3.2.6 *Sean $G, G_1, \dots, G_n \subset GL_n(\mathbb{C})$ subgrupos finitos de reflexiones tales que:*

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$$

Entonces

$$\mathcal{N}_G \simeq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{N}_{G_i}$$

Demostración. Ver [35] pág. 4. ■

Corolario 3.2.7 *Con la notación del lema anterior, \mathcal{N}_G es un modelo de Gelfand para G si y sólo si \mathcal{N}_{G_i} es un modelo de Gelfand para G_i .*

Demostración. Ver [35] pág. 4. ■

Presentamos dos teoremas que establecen condiciones para que el modelo polinomial de un grupo finito de Coxeter, constituya un modelo de Gelfand para dicho grupo.

Teorema 3.2.8 *Sea G un grupo de Coxeter finito e irreducible y sea W su realización como grupo de reflexiones. Entonces el modelo polinomial \mathcal{N}_W , es un modelo de Gelfand para G si y sólo si W no es un grupo de Weyl de tipo D_{2n}, E_7 ó E_8 .*

Demostración. Ver [35] pág. 7. ■

Utilizando en forma conjunta el lema 3.2.6, el corolario 3.2.7 y el teorema 3.2.8, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 3.2.9 *Sea G un grupo de Coxeter y sea W su realización como grupo de reflexiones. Entonces el modelo polinomial \mathcal{N}_W , es un modelo de Gelfand para G si y sólo si W no tiene como factor directo a un grupo de Weyl de tipo D_{2n}, E_7 ó E_8 .*

Con estos teoremas se concluye el estudio de modelos polinomiales en la familia de grupos de Coxeter.

3.3. El modelo polinomial en grupos de Coxeter

A continuación presentaremos una descripción del modelo polinomial \mathcal{N}_G para un grupo de Weyl G de tipo A_n (ver [3]), B_n (ver [2]) y D_{2n+1} (ver [5]). Por definición el modelo de Gelfand \mathcal{N}_G puede obtenerse como los ceros de ciertos operadores diferenciales en el álgebra de Weyl \mathcal{A} .

3.3.1. Grupo de Weyl de tipo A_n

Consideremos $G = \mathcal{S}_n$ el grupo simétrico de n elementos con la acción usual por permutación de las variables en el anillo de polinomios $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. En secciones anteriores hemos mostrado que el grupo simétrico \mathcal{S}_n es un grupo de Weyl de tipo A_{n-1} .

El grupo simétrico \mathcal{S}_n actúa en el conjunto de funciones multi-índice \mathcal{M}_n por:

$$\sigma \cdot \alpha = \alpha \circ \sigma^{-1} \quad \text{donde } \sigma \in \mathcal{S}_n \text{ y } \alpha \in \mathcal{M}_n$$

Esta acción induce un homomorfismo natural de \mathcal{S}_n en $\text{Aut}(\mathcal{P})$ dado por

$$\sigma \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{M}_n} \lambda_\alpha x^\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_n} \lambda_\alpha x^{\sigma \cdot \alpha} \quad \text{donde } \lambda_\alpha \in \mathbb{k}$$

Órbitas \mathcal{S}_n -minimales

Sea \mathcal{O}_n el espacio de órbitas de \mathcal{S}_n en \mathcal{M}_n . Es sencillo de verificar que dados dos multi-índices α y β pertenecientes a la misma órbita γ , sucede que $|\alpha| = |\beta|$ y $\alpha! = \beta!$; por lo que los notaremos $|\gamma|$ y $\gamma!$ respectivamente.

Definición 3.3.1 Diremos que dos multi-índices $\gamma, \mu \in \mathcal{O}_n$ son \mathcal{S}_n -equivalentes y lo notaremos $\gamma \sim_{\mathcal{S}_n} \mu$, si existe una biyección $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que

$$\mu = \{\varphi \circ \alpha : \alpha \in \gamma\}$$

Definición 3.3.2 Una clase $\gamma \in \mathcal{O}_n$ se denomina \mathcal{S}_n -minimal, si $|\gamma| \leq |\mu|$ para todo $\mu \in \mathcal{O}_n$ tal que $\gamma \sim_{\mathcal{S}_n} \mu$.

Para cada $\gamma \in \mathcal{O}_n$ consideremos el subespacio de \mathcal{P} definido como

$$S_\gamma = \left\{ \sum_{\alpha \in \gamma} \lambda_\alpha x^\alpha : \lambda_\alpha \in \mathbb{k} \right\}$$

El operador ∂

Consideremos el operador simétrico $\partial = \sum_{i=1}^n \partial_i$, y para cada $\gamma \in \mathcal{O}_n$ definamos el subespacio de S_γ

$$S_\gamma^\partial = \{P \in S_\gamma : \partial(P) = 0\}$$

La estructura de $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_n}$

Teorema 3.3.3 *El modelo $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_n}$ se descompone como*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}_n} = \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{S}_n\text{-minimal}}} \mathcal{S}_\gamma^\partial$$

$\mathcal{N}_{\mathcal{S}_n}$ es un modelo de Gelfand para el grupo \mathcal{S}_n .

Demostración. Ver [3] pág. 1850. ■

3.3.2. Grupo de Weyl de tipo B_n

Utilizando las mismas ideas que en la sección anterior, describiremos un modelo de Gelfand para un grupo de Weyl de tipo B_n .

Sea \mathcal{S}_n el grupo simétrico de n elementos y $\mathcal{C}_2 = \{\pm 1\}$ el grupo cíclico de orden dos. Podemos caracterizar a \mathcal{B}_n , el grupo de Weyl de tipo B_n , como el producto semidirecto

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{C}_2^n \times_s \mathcal{S}_n$$

inducido por la acción natural de \mathcal{S}_n en $\mathcal{C}_2^n = \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_2$

$$\sigma \cdot (w_1, \dots, w_n) = (w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)}) \quad \text{donde } \sigma \in \mathcal{S}_n \text{ y } (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{C}_2^n$$

La acción de \mathcal{S}_n en el conjunto \mathcal{M}_n , induce un homomorfismo natural de \mathcal{B}_n en $\text{Aut}(\mathcal{P})$ dado por

$$(w, \sigma) \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{M}_n} \lambda_\alpha x^\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_n} \lambda_\alpha (wx)^{\sigma\alpha} \quad \text{donde } \lambda_\alpha \in \mathbb{k}$$

siendo

$$(wx)^{\sigma\alpha} = \prod_{i=1}^n (w_i x_i)^{(\sigma\alpha)_i}$$

Órbitas \mathcal{B}_n -minimales

Como lo hemos definido en la sección anterior, \mathcal{O}_n es el espacio de órbitas de \mathcal{S}_n en \mathcal{M}_n .

Definición 3.3.4 Diremos que dos multi-índices $\gamma, \mu \in \mathcal{O}_n$ son \mathcal{B}_n -equivalentes y lo notaremos $\gamma \sim_{\mathcal{B}_n} \mu$, si existe una biyección $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que:

1. $\varphi(k)$ y k tenga la misma paridad $\forall k \in \mathbb{N}_0$.
2. $\mu = \{\varphi \circ \alpha : \alpha \in \gamma\}$.

Definición 3.3.5 Una clase $\gamma \in \mathcal{O}_n$ se denomina \mathcal{B}_n -minimal, si $|\gamma| \leq |\mu|$ para todo $\mu \in \mathcal{O}_n$ tal que $\gamma \sim_{\mathcal{B}_n} \mu$.

El operador Laplaciano

Consideremos el operador Laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$, el cual es un operador simétrico. Para cada $\gamma \in \mathcal{O}_n$ y S_γ como antes, definimos el subespacio de S_γ^Δ como:

$$S_\gamma^\Delta = \{P \in S_\gamma : \Delta(P) = 0\}$$

La estructura de $\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n}$

Teorema 3.3.6 El modelo $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_n}$ se descompone como

$$\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n} = \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n\text{-minimal}}} S_\gamma^\Delta$$

$\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n}$ es un modelo de Gelfand para el grupo \mathcal{B}_n . En particular, el número de órbitas minimales coincide con el número de clases de conjugación de \mathcal{B}_n .

Demostración. Ver [2]. ■

3.3.3. Grupo de Weyl de tipo D_{2n+1}

Conservamos las notaciones precedentes y usamos \mathcal{D}_n para notar el grupo de Weyl de tipo D_n naturalmente incluido en \mathcal{B}_n . Sea γ una órbita, para cada $\alpha \in \gamma$ consideremos los conjuntos:

$$E_\alpha = \{i \in I_n : \alpha_i \text{ es par}\} \quad O_\alpha = \{i \in I_n : \alpha_i \text{ es impar}\}$$

Es fácil de comprobar que $|E_\alpha|$ y $|O_\alpha|$ son invariantes para todos los elementos de una misma órbita, por lo que los notaremos $|E_\gamma|$ y $|O_\gamma|$ respectivamente.

Órbitas \mathcal{D}_n -minimales

Como lo hemos definido en la sección anterior, \mathcal{O}_n es el espacio de órbitas de \mathcal{S}_n en \mathcal{M}_n .

Definición 3.3.7 Diremos que dos multi-índices $\gamma, \mu \in \mathcal{O}_n$ son \mathcal{D}_n -*equivalentes* y lo notaremos $\gamma \sim_{\mathcal{D}_n} \mu$, si existe una biyección $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que:

1. $\varphi(k)$ y k tienen la misma paridad $\forall k \in \mathbb{N}_0$, ó $\varphi(k)$ y k tienen distinta paridad $\forall k \in \mathbb{N}_0$
2. $\mu = \{\varphi \circ \alpha : \alpha \in \gamma\}$.

Definición 3.3.8 Una clase $\gamma \in \mathcal{O}_n$ se denomina \mathcal{D}_n -*minimal*, si $|\gamma| \leq |\mu|$ para todo $\mu \in \mathcal{O}_n$ tal que $\gamma \sim_{\mathcal{D}_n} \mu$.

Teorema 3.3.9 Sea n impar, valen los siguientes enunciados:

1. Si γ es una órbita \mathcal{D}_n -minimal, entonces

$$\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n} \cap S_\gamma = \mathcal{N}_{\mathcal{D}_n} \cap S_\gamma$$

es un \mathcal{D}_n -módulo simple.

2. $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_n}$ es un modelo de Gelfand para \mathcal{D}_n .
3. Todo \mathcal{B}_n -módulo simple continúa simple cuando lo consideramos por restricción como \mathcal{D}_n -módulo.

4. Si consideramos a $\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n}$ como un \mathcal{D}_n -módulo por restricción

$$\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n} \simeq \mathcal{N}_{\mathcal{D}_n} \oplus \mathcal{N}_{\mathcal{D}_n}$$

Demostración. Ver [5] pág. 110. ■

En el mismo artículo, se hace mención y se demuestra que si n es par, $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_n}$ no es un modelo de Gelfand para el grupo de Weyl de tipo D_n . Pero sí ocurre que si M es un \mathcal{D}_n -módulo simple, entonces $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_n}$ contiene una copia de éste, y la multiplicidad de M en $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_n}$ es:

1. Dos si M es isomorfo a $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_n} \cap S_\gamma$ con γ es una órbita \mathcal{D}_n -minimal tal que $\gamma \neq \pi \circ \gamma$ y $|E_\alpha| = |O_\alpha|$. En este caso $\pi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ es la involución dada por $\pi(2i) = 2i + 1$ y $\pi(2i + 1) = 2i$.
2. Uno en otro caso.

Capítulo 4

Modelo de Gelfand para un Grupo de Weyl de tipo D_{2n}

En este capítulo construiremos un modelo de Gelfand para un grupo de Weyl de tipo D_n , con n par.

En primer lugar establecemos un mecanismo (ver [4]) para obtener módulos equivalente al módulo regular de un subgrupo finito de $GL_n(\mathbb{C})$, como submódulo de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Sea $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ un grupo finito no trivial y consideremos v un elemento regular de V , es decir $\sigma v \neq v$ para todo $\sigma \in G$ y $\sigma \neq 1$ (la existencia de un tal vector ocurre cuando se tiene un cuerpo infinito, ver por ejemplo [4] proposición 1.2). Debido a que el subgrupo de isotropía G_v de v es el trivial, tenemos que el cardinal de la órbita O_v de v coincide con el cardinal de G , entonces

$$O_v = \{gv : g \in G\}$$

Consideremos el polinomio interpolador P en O_v tal que

$$P(v) = 1 \quad \text{y} \quad P(gv) = 0 \quad \forall g \neq e$$

con e neutro de G .

Sean $g, h \in G$, entonces

$$(gP)(hv) = P(g^{-1}hv) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq g \\ 1 & \text{si } h = g \end{cases}$$

Esto indica que no sólo existe una biyección entre G y la órbita de v , si no que también entre G y la órbita del polinomio interpolador P . Además los elementos que forman la órbita de P son linealmente independientes, en efecto si en la identidad

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g P = 0 \quad \text{con } \lambda_g \in \mathbb{k}$$

evaluamos ambos miembros en gv , obtenemos $\lambda_g = 0$.

Por lo expuesto en los párrafos anteriores es fácil ver que acción regular de G es la misma que la acción de G sobre la órbita de P , es decir el G -módulo generado por la órbita de P es isomorfo al módulo regular.

4.1. Órbitas minimales

Antes de comenzar con la construcción del modelo de Gelfand para un grupo de Weyl de tipo D_n con n par, es necesario tener presente la siguiente caracterización de las órbitas minimales.

En lo que sigue, utilizaremos las notaciones de las secciones anteriores.

Proposición 4.1.1 *Una órbita γ es \mathcal{S}_n -minimal si y sólo si para cada $\alpha \in \gamma$, existe h entero no negativo tal que*

1. a) $\text{Im}g(\alpha) = \{0, 1, \dots, h-1\}$.
- b) $|\alpha^{-1}(i)| \geq |\alpha^{-1}(i+1)|$ para todo $0 \leq i \leq h-1$ (siendo $|\alpha^{-1}(i)|$ el cardinal del conjunto $\alpha^{-1}(i)$).

Demostración. Ver [4] pág 1845. ■

Proposición 4.1.2 *Una órbita γ es \mathcal{B}_n -minimal si y sólo si para cada $\alpha \in \gamma$ se cumple que para todo $j > i \geq 0$ con la misma paridad, $|\alpha^{-1}(i)| \geq |\alpha^{-1}(j)|$ (siendo $|\alpha^{-1}(i)|$ el cardinal del conjunto $\alpha^{-1}(i)$).*

Demostración. Ver [2] pág 365. ■

Proposición 4.1.3 Sea γ una órbita, se tiene:

1. γ es una órbita \mathcal{D}_n -minimal si y sólo si para toda $\alpha \in \gamma$ se cumple que:
 - a) para todo $j > i \geq 0$ con la misma paridad, $|\alpha^{-1}(i)| \geq |\alpha^{-1}(j)|$.
 - b) $|E_\gamma| \leq |O_\gamma|$.
2. Sea $\pi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ la involución dada por $\pi(2i) = 2i + 1$ y $\pi(2i + 1) = 2i$. Los siguientes enunciados son equivalentes:
 - a) γ y $\pi \circ \gamma$ son órbitas \mathcal{D}_n -minimales.
 - b) γ es \mathcal{B}_n -minimal.
 - c) $\pi \circ \gamma$ es \mathcal{B}_n -minimal.
3. Existen a lo sumo dos órbitas \mathcal{D}_n -minimales equivalentes a γ .
4. Si n es impar hay sólo una órbita \mathcal{D}_n -minimal equivalente a γ .
5. γ y $\pi \circ \gamma$ son órbitas \mathcal{D}_n -minimales si y sólo si $|E_\gamma| = |O_\gamma|$.

Demostración. Ver [5] pág. 106. ■

4.2. Construcción del modelo

Como hemos utilizado en secciones anteriores, sea $\mathcal{M}_n = \{\alpha : \mathbf{I}_n \rightarrow \mathbb{N}_0\}$ el conjunto de funciones multi-índice. Para cada $\alpha \in \mathcal{M}_n$ podemos asociarle un vector $\hat{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ de la siguiente manera:

$$\hat{\alpha} = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) \quad \text{tal que} \quad \alpha_{i_1} \geq \dots \geq \alpha_{i_n}$$

De esta forma queda definida una relación de orden en el conjunto de multi-índices: $\alpha \preceq \beta$ si y sólo si $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ó existe s , ($1 \leq s \leq n$) tal que

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\alpha}_{s-1} = \hat{\beta}_{s-1} \quad \text{y} \quad \hat{\alpha}_s < \hat{\beta}_s$$

siendo $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}_i$ las coordenadas de los vectores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ respectivamente. Este orden no es más que el orden lexicográfico en \mathbb{N}_0^n .

Proposición 4.2.1 Sea $\gamma \in \mathcal{O}_n$, entonces $\alpha, \beta \in \gamma$ si y sólo si $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$.

Demostración. Consideremos $\alpha, \beta \in \gamma$, entonces existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que $\beta = \sigma\alpha$, por lo que $\beta_i = \alpha_{\sigma^{-1}(i)}$ con $1 \leq i \leq n$. Luego es claro que $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$.

Consideremos ahora $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n$ tal que $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$, es decir

$$\alpha_{i_1} = \beta_{j_1}, \dots, \alpha_{i_n} = \beta_{j_n}$$

Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$ dado por

$$\sigma(i_k) = j_k \quad \text{con } 1 \leq k \leq n$$

es claro que $\beta = \sigma\alpha$, por lo que ambos multi-índices pertenecen a la misma órbita. ■

A partir de esta proposición no es difícil de comprobar que \preceq es una relación de orden total en el conjunto de órbitas \mathcal{O}_n .

Consideremos $\alpha \in \mathcal{M}_n$ la función multi-índice definida como $\alpha_i = i-1$, y sea γ la órbita de α . Es claro que γ es una órbita \mathcal{S}_n -minimal, y que $\widehat{\gamma} = (n-1, \dots, 1, 0)$.

Proposición 4.2.2 Con las notaciones precedentes, γ es el máximo del conjunto de órbitas minimales.

Demostración. Supongamos que existe una órbita minimal μ tal que $\mu \neq \gamma$ y $\gamma \preceq \mu$, luego existe $s \in \mathbf{I}_n$

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_i &= \widehat{\mu}_i, \quad \forall i < s \\ &\text{y} \\ \widehat{\gamma}_s &< \widehat{\mu}_s \end{aligned}$$

es decir

$$\widehat{\mu}_1 = n-1 \quad \dots \quad \widehat{\mu}_{s-1} = n - (s-1) \quad \text{y} \quad \widehat{\mu}_s > n-s$$

Luego por la definición de $\widehat{\mu}$, debe ser $\widehat{\mu}_s = n - (s-1)$, y por la minimalidad de μ , cada número menor que $n - (s-1)$ debe aparecer al menos 2 veces, lo que resulta imposible. En consecuencia γ es máximo. ■

Consideremos ahora, para cada $\alpha \in \mathcal{M}_n$ los conjuntos:

$$E_\alpha = \{i \in \mathbf{I}_n : \alpha_i \text{ es par}\} \quad O_\alpha = \{i \in \mathbf{I}_n : \alpha_i \text{ es impar}\}$$

como los hemos definido en la sección anterior. Entonces es claro que α puede ser determinado a partir de conocer sus restricciones α_E y α_O a los conjuntos E_α y O_α respectivamente. Observemos que $\alpha_E \in \mathcal{M}_{E_\alpha}$ y $\alpha_O \in \mathcal{M}_{O_\alpha}$.

Notación 4.2.3 En adelante para cualquier conjunto finito A , notaremos $\mathbf{1}$ a la función en \mathcal{M}_A dada por

$$\mathbf{1} : A \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad / \quad \mathbf{1}(i) = 1$$

Como en el caso \mathcal{S}_n , hay una acción natural del grupo simétrico \mathcal{S}_A en el conjunto de funciones multi-índice \mathcal{M}_A , dada por:

$$\sigma \cdot \alpha = \alpha \circ \sigma^{-1} \quad \text{donde } \sigma \in \mathcal{S}_A \text{ y } \alpha \in \mathcal{M}_A$$

y se extiende en forma análoga el concepto de órbita \mathcal{S}_A -minimal (ver 3.3.1).

Proposición 4.2.4 Sea $\alpha \in \mathcal{M}_n$ tal que α es \mathcal{B}_n -minimal, entonces ocurre que $\frac{\alpha_E}{2}$ es \mathcal{S}_{E_α} -minimal y $\frac{\alpha_O - \mathbf{1}}{2}$ es \mathcal{S}_{O_α} -minimal.

Demostración. Se sigue de la proposición 4 de [2] y de las identidades:

$$\left| \frac{\alpha_E}{2}^{-1}(i) \right| = |\alpha(i)| \quad \forall i \in |E_\alpha|$$

y

$$\left| \frac{\alpha_O - \mathbf{1}}{2}^{-1}(j) \right| = |\alpha(j)| \quad \forall j \in |O_\alpha|$$

■

Consideremos el subconjunto \mathcal{K} de \mathcal{M}_n dado por:

$$\mathcal{K} = \left\{ \alpha \in \mathcal{M}_n : \alpha \text{ es } \mathcal{D}_n\text{-minimal, } |E_\alpha| = |O_\alpha| \text{ y } \frac{\alpha_E}{2} \prec \frac{\alpha_O - \mathbf{1}}{2} \right\}$$

A modo de ejemplo, presentamos a continuación (remarcadas en las tablas) las órbitas que conforman el conjunto \mathcal{K} asociado a los grupos \mathcal{D}_4 , \mathcal{D}_6 y \mathcal{D}_8 respectivamente.

$\alpha_E \backslash \alpha_O$	11	13
00	0011	0013
02	0211	0213

$\alpha_E \backslash \alpha_O$	111	113	135
000	000111	000113	000135
002	002111	002113	002135
024	024111	024113	024135

$\alpha_E \backslash \alpha_O$	1111	1113	1133	1135	1357
0000	00001111	00001113	00001133	00001135	00001357
0002	00021111	00021113	00021133	00021135	00021357
0022	00221111	00221113	00221133	00221135	00221357
0024	00241111	00241113	00241133	00241135	00241357
0246	02461111	02461113	02461133	02461135	02461357

Definamos el subconjunto F del anillo de polinomios $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, de la siguiente forma:

$$F = \left\{ \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} x^{\alpha} : \lambda_{\alpha} = 0 \text{ si } \alpha \in \mathcal{K} \right\}$$

Observemos que si n es impar, F coincide con $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Proposición 4.2.5 F es un \mathcal{D}_n -submódulo del anillo de polinomios \mathcal{P} .

Demostración. A partir de la acción de \mathcal{D}_n dada por

$$\begin{aligned} (w, \sigma) \left(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} x^{\alpha} \right) &= \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} (wx)^{\sigma\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \pm \lambda_{\alpha} x^{\sigma\alpha} \end{aligned}$$

y el hecho que $\alpha \in \mathcal{K}$ si, y sólo si $\sigma\alpha \in \mathcal{K}$, resulta claro que F es un \mathcal{D}_n -módulo de \mathcal{P} . ■

Proposición 4.2.6 *F contiene un modelo de Gelfand para el grupo de Weyl de tipo \mathcal{D}_n , que notaremos $\tilde{\mathcal{N}}_{\mathcal{D}_n}$.*

Demostración. Bastará probar que F contiene un submódulo equivalente con el módulo regular de \mathcal{D}_n . En efecto, consideremos el polinomio:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=2}^n \left[x_i (x_i + i - 1) \prod_{j=1}^{i-2} (x_i^2 - j^2) \right]}{2^{n-1} [(n-1)!]^2 \prod_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-2} (i-1+j)(i-1-j)} \quad (4.1)$$

Observemos que P es el polinomio interpolador de la órbita del vector regular $v = (0, 1, \dots, n-1)$ que satisface

$$P(v) = 1 \quad \text{y} \quad P(\tau v) = 0 \quad \forall \tau \in \mathcal{D}_n, \tau \neq e$$

Probemos que P pertenece a F . Sea $\lambda_\alpha x^\alpha$ un término no nulo de P tal que α es \mathcal{D}_n -minimal, $|E_\alpha| = |O_\alpha|$ y $\frac{\alpha_E}{2} \prec \frac{\alpha_{O-1}}{2}$. Dado a como se definió P en 4.1 es fácil determinar que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_j > 0$ para $1 < j \leq n$. Luego $(\frac{\alpha_E}{2})_1 = 0$, y como $\frac{\alpha_E}{2}$ es $\mathcal{S}_{|E_\alpha|}$ -minimal, tenemos que

$$\widehat{\frac{\alpha_E}{2}} = (|E_\alpha| - 1, |E_\alpha| - 2, \dots, 0)$$

que por la proposición 4.2.2 es maximal, lo que es una contradicción.

Luego como F es un \mathcal{D}_n -módulo, F contiene al módulo generado por la órbita de P . ■

Notación 4.2.7 *Sea T un subconjunto del anillo de polinomios $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y G un subgrupo finito de $GL_n(\mathbb{C})$, en adelante consideraremos T^0 el submódulo de T definido como*

$$T^0 = \{p \in T : D(p) = 0, \forall D \in \mathcal{I}_G^-\}$$

siendo \mathcal{I}_G^- el conjunto de operadores diferenciales invariantes en el álgebra de Weyl como se ha definido en 3.1.

Proposición 4.2.8 *Sea G un subgrupo finito de $GL_n(\mathbb{C})$ y T un G -módulo del anillo de polinomios $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que T contiene un modelo de G , entonces T^0 también contiene un modelo de G .*

Demostración. Sea $S \subset T$ un G -módulo simple y supongamos que $S \not\subset T^0$. Entonces existe $D \in \mathcal{I}_G^-$ tal que $D(S) \neq 0$. Debido a que S es simple y D no nulo, se tiene que D es inyectivo. Luego $D(S) \simeq S$. Si $D(S) \subset T^0$ queda demostrada la proposición; en caso contrario volvemos a repetir el procedimiento. Como D es un operador del álgebra de Weyl \mathcal{A} de grado negativo, el procedimiento es finito, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $D^m(S) \subset T^0$ y $D^m(S) \simeq S$. ■

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que el G -módulo

$$F^0 = \{f \in F : D(f) = 0, \forall D \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}_n}^-\}$$

contiene el modelo $\tilde{\mathcal{N}}_{\mathcal{D}_n}$, debido a que F es un \mathcal{D}_n -módulo que contiene un modelo $\tilde{\mathcal{N}}_{\mathcal{D}_n}$.

Mostraremos que F^0 es el modelo buscado, es decir $F^0 = \tilde{\mathcal{N}}_{\mathcal{D}_n}$.

Utilicemos el resultado que se establece el punto 4. del teorema 3.3.9 para descomponer $\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n}$. Se tiene:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n} = \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n}\text{-minimal}} S_\gamma^\Delta = \bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n}\text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n}\text{-minimal} \\ |E_\gamma| = |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n}\text{-minimal} \\ |E_\gamma| > |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta$$

Además si $|E_\gamma| = |O_\gamma|$

$$\bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n}\text{-minimal} \\ |E_\gamma| = |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta = \bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma E}}{2} \prec \frac{\widehat{\gamma O^{-1}}}{2}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma O^{-1}}}{2}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma O^{-1}}}{2} \prec \frac{\widehat{\gamma E}}{2}} S_\gamma^\Delta$$

Como consecuencia de esta descomposición se tiene el siguiente lema.

Lema 4.2.9

$$\dim(\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n}) = 2 \dim \left(\bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta \right) + 2 \dim \left(\bigoplus_{\substack{\widehat{\gamma O}^{-1} \prec \widehat{\gamma E} \\ \frac{\widehat{\gamma O}^{-1}}{2} \prec \frac{\widehat{\gamma E}}{2}}} S_\gamma^\Delta \right) + \dim \left(\bigoplus_{\substack{\widehat{\gamma E} = \widehat{\gamma O}^{-1} \\ \frac{\widehat{\gamma E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma O}^{-1}}{2}}} S_\gamma^\Delta \right)$$

Demostración. Resulta de considerar la identidad

$$\dim(S_\gamma^\Delta) = \dim(S_{\pi \circ \gamma}^\Delta)$$

para cada órbita $\gamma \in \mathcal{O}_n$. Esta identidad surge del hecho que S_π^Δ y $S_{\pi \circ \gamma}^\Delta$ son isomorfos como \mathcal{D}_n -módulos, ver [5]. ■

Observación 4.2.10 Si n es impar, se tiene $F = \mathcal{P}$, por lo tanto $F^0 = \mathcal{N}_{\mathcal{D}_n, y}$ en [5] ha sido probado que es un modelo; en cambio, si n es par

$$F^0 \subseteq F \cap \mathcal{N}_{\mathcal{D}_n} = \bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| = |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta$$

es decir

$$F^0 \subseteq \bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\substack{\widehat{\gamma O}^{-1} \prec \widehat{\gamma E} \\ \frac{\widehat{\gamma O}^{-1}}{2} \prec \frac{\widehat{\gamma E}}{2}}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\substack{\widehat{\gamma E} = \widehat{\gamma O}^{-1} \\ \frac{\widehat{\gamma E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma O}^{-1}}{2}}} S_\gamma^\Delta \quad (4.2)$$

Notación 4.2.11 Dado un grupo G , en adelante notaremos

$$Inv(G) = \{g \in G : g^2 = e\}$$

el conjunto de involuciones del grupo G .

Lema 4.2.12 Sea G un grupo de Coxeter y M un modelo de Gelfand para G . Entonces:

$$\dim(M) = |Inv(G)|$$

Demostración. Es consecuencia del indicador de Fröbenius-Schur y del hecho que las representaciones de un grupo de Coxeter pueden ser realizadas sobre los

número reales, ver [8]. ■

Con el objeto de establecer el resultado central de este trabajo, daremos una relación entre el número de involuciones de \mathcal{B}_n y el número de involuciones de \mathcal{D}_n . La identidad establecida será utilizada en la demostración del teorema 4.2.14.

Lema 4.2.13 *Si n es par ($n = 2k$) entonces*

$$2 |\text{Inv}(\mathcal{D}_n)| - |\text{Inv}(\mathcal{B}_n)| = \frac{(2k)!}{k!}$$

Demostración. Si $g = (w, \sigma) \in \mathcal{B}_n$, con $w \in \mathbb{Z}_2^n$ y $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que

$$g^2 = (w, \sigma)^2 = e$$

entonces g esta formado por transposiciones signadas (en donde el signo de cada transposición es el mismo) y signos, es decir

$$g = (\pm i_1; \pm j_1) \dots (\pm i_r; \pm j_r) (\pm k_{2r+1}) \dots (\pm k_{2k})$$

con $\mathbf{I}_n = \{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r, k_{2r+1}, \dots, k_{2k}\}$ formada por elementos distintos. Así el número de involuciones de \mathcal{B}_n es

$$|\text{Inv}(\mathcal{B}_n)| = \sum_{r=0}^k \frac{\prod_{j=0}^{r-1} \binom{n-2j}{2}}{r!} 2^r 2^{n-2r}$$

Si $r < k$, la mitad de estos elementos perteneces a \mathcal{D}_n y la otra mitad a $\mathcal{B}_n - \mathcal{D}_n$, por lo que

$$|\text{Inv}(\mathcal{D}_n)| = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\prod_{j=0}^{r-1} \binom{n-2j}{2}}{r!} 2^r 2^{n-2r} + \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \binom{n-2j}{2}}{k!} 2^k 2^{n-2k}$$

Luego

$$2 |\text{Inv}(\mathcal{D}_n)| - |\text{Inv}(\mathcal{B}_n)| = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \binom{n-2j}{2}}{k!} 2^k 2^{n-2k} = \frac{(2k)!}{k!}$$
■

Teorema 4.2.14 *El G -módulo F^0 es un modelo de Gelfand para el grupo \mathcal{D}_n .*

Demostración. Como se señaló antes, cuando n es impar, F^0 coincide con $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_n}$, y en [5] fue probado que $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_n}$ es un modelo de Gelfand para el grupo \mathcal{D}_n .

Cuando n es par, como F^0 contiene al modelo $\tilde{\mathcal{N}}_{\mathcal{D}_n}$ sólo debemos probar que $\dim(F^0) \leq \dim(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathcal{D}_n})$. Por la identidad 4.2 se tiene que

$$\dim(F^0) \leq \dim \left(\bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2} < \frac{\widehat{\gamma_E}}{2}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) \quad (4.3)$$

De la proposición 1.10.3, se sigue que la dimensión del modelo $\mathcal{N}_{\mathcal{B}_n}$ coincide con el número de involuciones del grupo \mathcal{B}_n , ahora por el lema 4.2.9 resulta:

$$\begin{aligned} |\text{Inv}(\mathcal{B}_n)| &= 2 \dim \left(\bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta \right) + 2 \dim \left(\bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_E}}{2} < \frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) + \dim \left(\bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) \\ |\text{Inv}(\mathcal{B}_n)| + \dim \left(\bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) &= 2 \dim \left(\bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2} < \frac{\widehat{\gamma_E}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) \\ \frac{1}{2} \left[|\text{Inv}(\mathcal{B}_n)| + \dim \left(\bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) \right] &= \dim \left(\bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2} < \frac{\widehat{\gamma_E}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) \end{aligned}$$

y como

$$\dim \left(\bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) = \sum_{\frac{\widehat{\gamma_E}}{2} = \frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2}} \dim(S_\gamma^\Delta) = \sum_{\chi \in \mathcal{S}_n} \binom{2n}{n} \chi^2(1) = \frac{(2n)!}{n!}$$

entonces

$$\frac{1}{2} \left[|\text{Inv}(\mathcal{B}_n)| + \frac{(2n)!}{n!} \right] = \dim \left(\bigoplus_{\substack{\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}_n} \text{-minimal} \\ |E_\gamma| < |O_\gamma|}} S_\gamma^\Delta + \bigoplus_{\frac{\widehat{\gamma_{O^{-1}}}}{2} < \frac{\widehat{\gamma_E}}{2}} S_\gamma^\Delta \right) \quad (4.4)$$

Por otro lado, de la identidad establecida en el lema 4.2.13, resulta

$$|Inv(\mathcal{D}_n)| = \frac{1}{2} \left[|Inv(\mathcal{B}_n)| + \frac{(2n)!}{n!} \right]$$

y utilizando las identidades 4.3 y 4.4 obtenemos que

$$\dim(F^0) \leq |Inv(\mathcal{D}_n)| = \dim(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathcal{D}_n})$$

Con lo que hemos demostrado que F^0 es un modelo de Gelfand para \mathcal{D}_n . ■

Bibliografía

- [1] Adin R. M., Postnikov A. and Roichman Y., *A Gelfand model for Wreath Products*. arXiv:math.RT/08022824 v1, 2008.
- [2] Araujo J.O., *A Gelfand Model for a Weyl Group of Type B_n* . Contributions to Algebra and Geometry. Volume 44 (2003). no 2, 359-373.
- [3] Araujo J. O. and Aguado J. L., *A Gelfand model for the symmetric group*. Marcel Dekker, Inc. Communications in algebra 294 (2001) , 1841-1851.
- [4] Araujo J. O. and Aguado J. L., *Representations of Finite Groups on Polynomial Rings*. Actas V congreso de matemáticas "Dr. Antonio A. R. Monteiro". Bahia Blanca. 1999.
- [5] Araujo J. O and Bignon J.J., *A Gelfand model for Weyl group of type D_n and the branching rules $D_n \hookrightarrow B_n$* . Elsevier. Journal of Algebra 294 (2005) 97-116.
- [6] Baddeley, R., *Models nad involution models for wreath products and certain Weyl groups*. J. London Math. Soc. (2) 44 (1991), no. 1, 55-74.
- [7] Baddeley R., *Ph.D. Thesis*. Cambridge 1991.
- [8] Bessis D., *Sur le corps de d'efinition d'un groupe de réflexions complexe*. Comm. in Algebra. **25** (1997), 2703-2716
- [9] Björk J.E., *Ring of Differential Operators*. North-Holland Publishing Company. 1979. Zbl pre0499.13009.

- [10] Bernstein I., Gelfand I. and Gelfand S., *Models of representations of Lie groups*. Selected. Math. Soviet **1** (2) (1981) 121-142.
- [11] Carter R. W., *Finite groups of Lie type: Conjugacy classes and complex characters* Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication, (New York) John Wiley & Sons, Inc.(1985).
- [12] Clark A. and Ewing J., *The realization of polynomial algebras as cohomology rings*. Pacific J. Math. 50 (1974).
- [13] Cohen A. M., *Finite quaternionic reflection groups*. J. Algebra 64 (1980).
- [14] Coxeter H. S. M., *Groups generated by unitary reflections of period two*. Canad. J. Math.9 (1957).
- [15] Coxeter H. S. M., *The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$* . London. J. Math. Soc. 10 (1935).
- [16] Grove L.C. and Benson C. T., *Finite Reflection Groups*. Ed. Springer-Verlag. New York, Berlin Heidelberg, Tokio. 1985..
- [17] Howlett R. and Zworesstine C., *On Klyachkos model for the representations of finite linear groups*. China Higher Education Press (Beijing), y Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg), 2000.
- [18] Hughes M., *Representations of complex imprimitive reflection groups*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 94 (1983). 425-436.
- [19] Humphreys J. E., *Reflection groups and Coxeter groups*. Ed. Board. New York, Port Chester, Melbourne, Sydney. 1990.
- [20] Huppert B., *Character theory of finite groups*. Walter de Gruyter. Berlin-New York. 1998.
- [21] Inglis N. F.J., Richardson and Saxl J., *An explicit model for the complex representations of S_n* . Arch. Math. (Basel) 54 (1990), no. 3, 258-259.

- [22] Inglis N. F. J. and Saxl J., *An explicit model for the complex representations of the finite general linear groups*. Archiv der Mathematik **57** (1991), 424-431.
- [23] James G. D. and Liebeck M., *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press. 1993.
- [24] Kane R., *Reflection Groups and Invariant Theory*. Ed. Springer-Verlag. New York, Berlin Heidelberg, Tokio. 1944.
- [25] Klyachko A. A., *Models for complex representations of groups $GL(n, F_q)$* , (Russian), Mat. Sb. (N.S.), 120(162), (1983), 371-386.
- [26] Klyachko A. A., *Models for the complex representations of the groups $GL(n, q)$* . Math. USSR Sbornik **48** (1984), 365379.
- [27] Kodiyalam V. and Verma D.N., *A natural representation model for symmetric groups*. arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.
- [28] Lusztig G., *A class of irreducible representations of a Weyl group*. Proc. Kon. Nederl. Akad.(A) 82 (1979).
- [29] Lusztig G., *Irreducible representations of finite classical groups*. Invent. Math., 43:2, (1977),125-175.
- [30] Macdonald I. G., *Some irreducible representations of Weyl groups*. Bull. London Math. Soc. 4 (1972), 148-150.
- [31] Marberg, E., *Automorphisms and generalized involution models of finite complex reflection groups*. Journal of Algebra, Volumen 334, Issue 1, 15 May 2011, 295-320.
- [32] Neusel M.D., *Invariant Theory*. AMS. Student Mathematical Library. Vol. 36.
- [33] Pantoja J. and Soto Andrade J., *Fonctions sphériques et modèles de Gel.fand pour le groupe de mouvements rigides d.un espace paraeuclidien sur un corps local*. Comptes Rendus de L.Académie des Sciences **302**, (1986), 463-466.

- [34] Ryan P.D., *Representations of Weyl groups of type B induced from centralisers of involutions*. Bull. Austral. Math. Soc. 44 (1991), no. 2, 337–344.
- [35] Shripad G. C. and Oesterlé J., *On Gelfand models for finite Coxeter groups*. arXiv:0907.4605v1 [math.GR] 27 Jul 2009.
- [36] Shephard G. C. and Todd J. A., *Finite unitary reflection groups*. Canad. J. Math. 6 (1954), 274-304.
- [37] Springer T.A., *Construction of Representations of Weyl Groups*. Inventiones Mathematicae 44 (1978).
- [38] Vinroot R., *Involution models of finite coxeter groups*. AMS. 2000.