Facultad de Ciencias Exactas.

Departamento de Matemáticas.

Dualidades Bi-topológicas para retículos distributivos y álgebras de Heyting.

Trabajo final realizado por el Sr. Agustín Nagy para obtener el título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Trabajo realizado bajo la dirección del Dr. Sergio Celani.

Índice general

Agradecimientos

A mis padres, José y María por darme el apoyo incondicional y no dejarme bajar los brazos en más de alguna ocasión. A mis queridos hermanos Christian y Camila, no hay palabras para agradecerles todo el apoyo que me brindaron.
A mis abuelos paternos y maternos, aunque algunos ausentes, nunca se olvidarán sus grandes consejos.
A todos mis amigos, aquellas personas que se eligen para hacer más fácil este camino.
A todos los profesores del Departamento de Matemáticas de la UNICEN.
A Sergio, por su espíritu entusiasta y calidez, siempre dispuesto a ayudarme y dirigirme para la realización de este trabajo. A todos ustedes, Gracias.

Introducción

En el desarrollo histórico de las ciencias matemáticas, han surgido, por una necesidad natural, una gran cantidad de ramas de estudio entre las cuales, se encuentra la topología. Esta disciplina es de caracter fundamental en las matemáticas permitiendo dar rigor y fundamentos lógicos a un sinfín de trabajos que no sólo son propios del área, sino también de la física, de la ciencias de la computación, entre otras.

En los años 30's, Marshall Stone, en su trabajo *Topological representation of distributive lattices*, desarrolló una equivalencia dual entre la categoría de las álgebras de Boole y los homomorfismos booleanos , y la categoría de los espacios topológicos compactos, Haussdorf y cero dimensionales, (espacios que se conocen como espacios de Stone) y las aplicaciones continuas entre ellos. Años mas tarde, en 1937, Stone extendió su trabajo, estableciendo una equivalencia dual entre la categoría cuyos objetos son retículos distributivos y sus morfismos son homomorfismos de retículos, con la categoría cuyos obejtos son espacios topológicos T_0, compactos, coherentes y sober (espacios espectrales) , y cuyos morfismos son las funciones espectrales entre ellos.
En 1970, Priestley desarrolló una equivalencia dual de la categoría de retículos distribubutibos en función de espacios topológicos compactos y ordenados, completamente disconexos en el orden, los cuales son conocidos como espacios de Priestley, estableciendo así, que dicha categoría es dualmente equivalente a la categoría cuyos objetos son espacios de Priestley y cuyos morfismos son funciones continuas que preservan el orden.
Como consecuancia de ambas equivalencias duales, Cornish (1975) desarrolló un isomorfismo entre las categorías de espacios de Priestley y espacios espectrales.

Desde el punto de vista de la topología de punto libre, resulta más natural trabajar con espacios espectrales, puesto que estos sólo tienen una estructura topológica, en cambio, los espacios de Priestley poseen una estructura ordenada que interactúa con la topológica, haciendo que sea mas dificil su estudio. Sin embargo, los espacios de Priestley tienen una relación mas natural con la lógica, ya que estos espacios son muy usados en el estudio de las semánticas de Kripke. En el desarrollo de este trabajo, sólo mencionaremos la dualidad desarrollada por Esakia (1974), que no es más que la restricción de la dualidad de Priestley a una sub-categoría. Otra de las ventajas de la dualidad establecida por Priestley, es la descipción sencilla que puede hacerse de los conceptos algebraicos importantes en el estudio de los retículos distributivos tales como filtros, filtros primos, filtros maximales, ideales ideales primos, ideales maximales, sub-retículos, entre otros. Además a partir de la descrpición hecha sobre los espacios de Priestley, éstos conceptos también tienen una descripción natural sobre los espacios bi-topológicos y los espacios espectrales.

En el desarrollo del presente trabajo nos daremos a la tarea de definir los espacios bi-topológicos y los espacios de Stone por pares, los cuales proveen una generalización bi-topológica de los espacios de Stone y como puede suponerse, las condiciones de compacto, Hausdorff y cero dimensional, se traducen en compacto por pares, Hausdorff por pares y cero dimensional por pares.
Por otro lado, los espacios de Stone por pares, proveen un medio para establecer un isomorfismo entre las categorías de espacios de Priestley y espacios espectrales, dando así, una manera mas natural para establecer un isomorfismo, que la aportada por Cornish, estableciendo que los espacios de Priestley son isomorfos a los espacios de Stone por pares y estos, son isomorfos a los espacios

espectrales. Así como tambén, los morfismos de espacios de Priestley, son también isomorfos a los morfismos de espacios de Stone por pares, como tambíen isomorfos a los morfismos de espacios espectrales.
Por otro lado, mostraremos que la categoría de retículos distributivos es dualmente equivalente a la categoría de espacios de Stone por pares, lo que es esperable, puesto que de esta manera, considerando los resultados anteriores, dicha categoría resulta dualmente equivalente con la categoría de espacios espectrales y la categoría de espacios de Priestley. Estos resultados resultan consistentes con los ya obtenidos de manera directa.

Luego de obtener los isomorfismos y las equivalencias duales necesarias, nos enfocaremos en dar una descripción y una lectura dual de algunos objetos algebraicos de interés, en cada una de las categorías que intervienen. De este modo, problemas aparentemente algebraicos pueden ser tratados dualmente de una manera topológica, y recíprocamente, problemas topológicos tendrán su correspondiente lectura algebraica.

Este trabajo se presenta en 6 capítulos. Un capítulo 1, donde definimos los conceptos básicos de la topología y mostraremos algunos de los principales resultados que usaremos en el trabajo. Definimos en una segunda sección los espacios bi-topológicos, y los espacios de Stone por pares, donde además, obtendremos resultados útiles para el desarrollo del trabajo.
Un capítulo 2, en el cual desarrollaremos en detalle los isomorfismos de las categorías de los espacios de Stone por pares, cuyos morfismos son las funciones bi-continuas, con la categoría de espacios de Priestley y la categoría de espacios espectrales.
Un capítulo 3, en el cual estableceremos las equivalencias duales obtenidas por Stone y Priestley entre la categoría cuyos objetos son los retículos distributivos y las categorías de espacios de Priestley y espacios espectrales, respectivamente.
Un capítulo 4, en el cual, estudiaremos la descripción dual de los conceptos algebraicos y subretículos en función de los espacios de Priestley, Stone por pares y espectrales.
En el desarrollo de los capítulos 5 y 6, nos enfocamos en desarrollar equivalencias duales para casos particulares de retículos distributivos, las álgebras de Heyting y álgebras de Boole, respectivamente.

Capítulo 1

Espacios bi-Topológicos

Desde su introducción en 1963 (Kelly), los espacios bi-topológicos han sido materia de investigación exhaustiva por muchos matemáticos, en particular, dicha investigación se basa en la manera correcta de generalizar las propiedades básicas de un espacio topológico, a un espacio (X, τ_1, τ_2) con dos topologías.
En una primera sección recordaremos entonces las definiciones básicas de los espacios topológicos, necesarias para el desarrollo de éste capítulo. Mientras que en una segunda sección definimos los espacios de Stone por pares y veremos algunos resultados importantes.

1.1. Nociones preliminares de Topología

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío, una topología $\tau \subseteq P(X)$ es una familia de subconjuntos que verifica:*

1 $\emptyset, X \in \tau$.

2 Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$.

3 Si $U_1, \cdots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

Llamaremos espacio topológico a un conjunto X, dotado por una topología τ y lo indicaremos como (X, τ). Llamaremos abiertos, a los elementos de la topología. Así mismo conjunto se dirá cerrado, si y sólo si, su complemento es abierto.

Definición 1.2. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia $B \subseteq P(X)$ es una base para una topología τ sobre X, si verifica:*

1 Para cualquier punto $x \in X$ existe un sub-conjunto $U \in B$ tal que $x \in U$.

2 Si $x \in U_1 \cap U_2$, con $U_1, U_2 \in B$, entonces, existe $V \in B$ tal que $x \in V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Definición 1.3. *Sea X un conjunto no vacío, y sea B una base para una topología sobre X. Definimos la topología τ generada por B a la colección de sub-conjuntos τ que verifica que para todo $U \in \tau$ y para todo $x \in U$ existe $V \in B$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

Observación 1.1. *Notemos que, hemos definido la topología definida a partir de una base, pero puede hacerse el proceso inverso, a apartir de una topología, encontrar cual es su base, como nos indica el siguiente lema.*

Lema 1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $C \subseteq \tau$ una colección de abiertos que verifica para cualquier abierto U, y para cualquier elemento $x \in U$, existe $V \in C$ de manera tal que $x \in V \subseteq U$, entonces C es una base, y la topología generada por C, coincide con τ.*

Definición 1.4. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia de sub-conjuntos $S \subseteq P(X)$ es una sub-base para una topología si verifica que $\bigcup_{U \in S} U = X$.*
Definimos entonces, la topología generada por una sub-base como la que tiene por abiertos, a uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de la sub-base.

Definición 1.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que:*

1 *X es T_0 si para cualquier par de puntos x,y con $x \neq y$, existe un abierto $U \in \tau$ que contiene exactamente a uno de ellos.*

2 *X es T_1, si para cada par de puntos x, y con $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ con $x \in U, y \in V$.*

3 *X es T_2 si para cada par de puntos $x \neq y$ existen abiertos disjuntos U, V con $x \in U$ e $y \in V$.*

Definición 1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un cubrimiento si verifica $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.*

Definición 1.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que X es un espacio compacto, si para todo cubrimiento por abiertos de X, existe un sub-cubrimiento finito.*

Lema 1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y supongamos que para todo cubrimiento por sub-básicos tiene un sub-cubrimiento finito, entonces X es compacto.*

Demostración. Por absurdo, supongamos que X no es compacto, y por tanto, existirá al menos algún cubrimiento abierto, sin pérdida de generalidad abiertos básicos, que no posee ningun sub-cubrimiento finito. Consideremos entonces

$$F = \{\{U_\alpha\}_{\alpha \in J} : \text{ No tiene sub-cubrimiento finito}\}.$$

Notemos que, es una familia de elementos parcialmente ordenada por la inclusión, y además posee cota superior, de donde se sigue por el Lema de Zorn, que posee un elemento maximal $\mathbf{C}$.
Sea $U_\alpha \in \mathbf{C}$, puesto que U_α es un básico, existen $S_{\alpha_1}, \cdots, S_{\alpha_n}$ de manera tal que $U_\alpha = S_{\alpha_1} \cap, \cdots, \cap S_{\alpha_n}$.
Notemos que, alguno de estos sub-básicos debe estar en $\mathbf{C}$. En efecto, supongamos por absurdo que $S_{\alpha_i} \notin \mathbf{C}$, para $i = 1, \cdots, n$, se sigue entonces que $\mathbf{C} \cup S_{\alpha_i} \notin F$ y por lo tanto, existe un sub-cubrimiento finito $U_1, \cdots, S_{\alpha_i}$. Se sigue entonces, que $X - S_{\alpha_i}$ posee un sub-cubrimiento finito por básicos.
Notemos entonces que

$$\begin{aligned} X - U_\alpha &= X - \bigcap_{i=1}^{n} S_{\alpha_i} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (X - S_{\alpha_i}). \end{aligned}$$

Desde que $X - S_{\alpha_i}$ posee sub-cubrimiento finito, se sigue que $X - U_\alpha$ posee sub-cubrimiento finito, y así, $(X - U_\alpha) \cup U_\alpha$ es un cubrimiento de X, por elemento de $\mathbf{C}$, y posee sub-cubrimiento finito, lo que es imposible, luego $S_{\alpha_i} \in \mathbf{C}$ para algún índice i. Puesto que para cada básico $U_\beta \in \mathbf{C}$ existe S_β sub-básico con $U_\beta \subseteq S_\delta$, se sigue que X posee un cubrimiento por sub-básicos que no tiene ningún sub-cubrimiento finito, lo que es imposible. Luego X es compacto. □

Definición 1.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ una familia de cerrados, diremos que posee la propiedad de intersección finita (PIF), si toda subfamilia finita tiene intersección no vacía.*

Teorema 1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, son equivalentes:*

1 *X es compacto.*

2 Toda familia de cerrados $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ con la PIF, tiene intersección no vacía.

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2) Consideremos X compacto, y sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de cerrados que posee la PIF, veamos que $\bigcap_{\alpha\in J} V_\alpha \neq \emptyset$. Supongamos que

$$\bigcap_{\alpha\in J} V_\alpha = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha^c = X.$$

Puesto que X es compacto, existen $V_{\alpha_1}^c \cdots V_{\alpha_n}^c$ verificando que $X = V_{\alpha_1}^c \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}^c$, de donde se sigue que

$$\emptyset = V_{\alpha_1} \cap \cdots \cap V_{\alpha_n}.$$

Lo que resulta imposible puesto que $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ posee PIF.
2 $\Rightarrow$ 1) Consideremos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento por abiertos, es decir,

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \Leftrightarrow \emptyset = \bigcap_{\alpha\in J} U_\alpha^c.$$

Por hipótesis, existen $U_{\alpha_1} \cdots U_{\alpha_n}$ tal que

$$\emptyset = U_{\alpha_1}^c \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}^c \Leftrightarrow X = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$$

Como queríamos mostrar. □

Definición 1.9. *Sea (X,τ) un espacio topológico, diremos que X es cero dimensional, si tiene como base a los conjuntos abiertos y cerrados de X, a los cuales llamaremos Clopens de (X,τ) e indicaremos como $Clop(X)$.*

Definición 1.10. *Sea (X,τ) un espacio topológico, diremos que es un espacio de Stone, si X es Hausdorff, compacto y cero dimensional.*

1.2. Espacios de Stone por pares

Definición 1.11. *Sea X un conjunto no vacío, una terna (X,τ_1,τ_2) es un espacio bi-topológico, si obviamente, tanto τ_1 como τ_2 son dos topologías sobre X.*

Definición 1.12. *Sea (X,τ_1,τ_2) definimos $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$, es la tología cuya sub-base es la dada por $\tau_1 \cup \tau_2$.*

Observación 1.2. *Es sencillo mostrar que $\tau_1 \cup \tau_2$ es sub-base para alguna topología. Notemos que los básicos generados por esta sub-base son dados por elementos de la forma $U \cap V$ donde $U \in \tau_1$ y $V \in \tau_2$.*

Definición 1.13. *Sea (X,τ_1,τ_2) un espacio bi-topológico, y consideremos $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$. Para una propiedad topológica P arbitraria, diremos que:*

- *(X,τ_1,τ_2) es un espacio bi-P si la propiedad P se verifica para cada topología independientemente una de la otra.*
- *Diremos que, el espacio $(X\tau_1,\tau_2)$ es un espacio supremo-P, si la propiedad P se verifica para $(X,\tau_1 \vee \tau_2)$*

Para la definición de los que llamaremos espacios de Stone por pares, necesitaremos la correcta generalización de estos conceptos para espacios bi-topológicos. Nos centraremos entonces, en las características compacto por pares, Hausdorff por pares y cero dimensional por pares.
Debe tenerse en cuenta que las nociones topológicas que se verifican por pares, son ligeramente diferentes a las nociones topológicas que se verifican en ambas topologías (propiedades bi-P) y diferentes además a las propiedades que se verifican para $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$.

Definición 1.14. *Sea (X,τ_1,τ_2) un espacio bi-topológico, diremos que*

- *(X,τ_1,τ_2) es un espacio T_0 por pares si para cada par de puntos $x,y\in X$, con $x\neq y$, existe $U\in\tau_1\cup\tau_2$ que contiene a exactamente un solo de ellos.*
- *(X,τ_1,τ_2) es un espacio T_1 por pares si para cada par de puntos $x,y\in X$ $x\neq y$ existe $U\in\tau_1\cup\tau_2$ de manera tal que $x\in U$ $y\notin U$ ó bien $x\notin U$ $y\in U$.*
- *(X,τ_1,τ_2) es un espacio T_2, ó bien Hausdorff, por pares si para cada par de puntos $x,y\in X$ $x\neq y$ existen $U\in\tau_1$ $V\in\tau_2$ disjuntos, de manera tal que $x\in U$ $y\in V$, ó bien, existen $U\in\tau_2$ $V\in\tau_1$ con la misma propiedad.*

Notemos que, la definición de Hausdorff por pares, podría pensarse como sigue
Para cada par de puntos $x,y\in X$ $x\neq y$ existen $U,V\in\tau_1\cup\tau_2$ disjuntos,de manera tal que $x\in U$ $y\in V$. Es facil notar que, nuestra definición original implica inmediatamente esta definición alternativa pero en general, no es válida la recíproca de dicha afirmación. Para que dichas definiciones sean equivalentes, el espacio bi-topológico deberá ser cero dimensional por pares.

Para (X,τ_1,τ_2) indicaremos con $\delta_1=\{U\subseteq X:\text{U es cerrado para }\tau_1\}$ y de manera análoga $\delta_2=\{U\subseteq X:\text{U es cerrado para }\tau_2\}$.

Definición 1.15. *Sea (X,τ_1,τ_2) un espacio bi-topológico, diremos que es un espacio cero dimensional por pares , si los abiertos de (X,τ_1) y los cerrados de (X,τ_2) forman una base para (X,τ_1), mientas que los abiertos de (X,τ_2) y los cerrados de (X,τ_1) forman una base para (X,τ_2).*
Es decir, el conjunto $\beta_1=\tau_1\cap\delta_2$ es una base para (X,τ_1) y el conjunto $\beta_2=\tau_2\cap\delta_1$ es una base para (X,τ_2).

Observación 1.3. *Para un espacio cero dimensional por pares, se obtiene que $U\in\beta_1\Leftrightarrow U^c\in\beta_2$.*

Bajo la condición de ser cero dimensional por pares, las definiciones de Hausdorff por pares son equivalentes, como mostraremos a continuación.

Lema 1.3. *Sea (X,τ_1,τ_2) un espacio bitopológico, cero dimensional por pares, entonces, son equivalentes:*

1 *(X,τ_1) es T_0*

2 *(X,τ_2) es T_0*

3 *(X,τ_1,τ_2) es T_2 por pares.*

4 *Para cualquier par de puntos $x,y\in X$ con $x\neq y$ existen $U,V\in\tau_1\cup\tau_2$ de manera tal que $U\cap V=\emptyset$ y además $x\in U$ $y\in V$.*

5 *(X,τ_1,τ_2) es supremo T_2*

6 *(X,τ_1,τ_2) es bi- T_0*

Demostración. $1\Rightarrow 2$) Supongamos que, (X,τ_1) es T_0, para cualquier par de puntos $x\neq y$, existe $U\in\tau_1$ tal que contiene solo a uno de ellos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que contiene a x. Siendo β_1 una base para (X,τ_1), existe $V\in\beta_1$ tal que $x\in V\subseteq U$. Ya que (X,τ_1,τ_2) es cero dimensional por pares, $V^c\in\beta_2$ y además $y\in V^c$ y además, $x\notin V^c$, por lo cual (X,τ_2) es T_0.
$2\Rightarrow 3$) Supongamos que (X,τ_2) es T_0, por lo cual, para cada par de puntos distintos, $x\neq y$ existe $U\in\tau_2$ tal que $x\in U$. Siendo X un espacio cero dimensional por pares, existe $V\in\tau_2\cap\delta_1$ tal que $x\in V\subseteq U$, y consideremos $V^c\in\tau_1\cap\delta_2$, es tal que $y\in V^c$ y además, $V\cap V^c=\emptyset$, entonces (X,τ_1,τ_2) es un espacio Hausdorff por pares.

$3 \Rightarrow 4$) Supongamos que, (X, τ_1, τ_2) es un espacio Hausdorff por pares, y consideremos un par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces, por definición, existen $U \in \tau_1$ $V \in \tau_2$ tal que $x \in U$, $y \in V$ y además, $U \cap V = \emptyset$, ó bien, $U \in \tau_2$ $V \in \tau_1$ y tienen la misma propiedad.
Notemos entonces que $U, V \in \tau_1 \cup \tau_2$, se sigue inmediatamente lo afirmado.
$4 \Rightarrow 5$) Es inmediato por definición.
$5 \Rightarrow 6$) Supongamos que, (X, τ_1, τ_2) es supremo Hausdorff, y sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. Puesto que (X, τ_1, τ_2) es cero dimensional por pares, existen $U_1, U_2 \in \beta_1$ y $V_1, V_2 \in \beta_2$ de manera tal que $x \in U_1 \cap V_1$, $y \in U_2 \cap V_2$ y además $(U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = \emptyset$. Si $y \notin U_1$ entonces existe $U_1 \in \beta_1$ de manera tal que $x \in U_1$ e $y \notin U_1$. En caso contrario, si $y \in U_1$, entonces $y \notin V_1$, de donde se sigue que $y \in U_2 \cap V_1^c \in \beta_1$ y además, puesto que $x \in V_1$ obtenemos que $x \notin U_2 \cap V_1^c$, así (X, τ_1) es T_0. Un razonamiento análogo muestra que (X, τ_2) es T_0.
$6 \Rightarrow 1$) Es inmediato por definición. □

Definición 1.16. *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bi-topológico. Diremos que es un espacio compacto por pares si para todo cubrimiento de X, con elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$, existe un sub-cubrimiento finito.*

Observación 1.4. *Notemos que, por el Lema 1.2 , las nociones de compacto por pares y supremo compacto, coinciden, puesto que basta con tomar sub básicos para probar la compacidad de un espacio topológico.*

Definición 1.17. *Sea (X, τ_1, τ_2), diremos que es bi-compacto si ambos espacios topológícos (X, τ_1) y (X, τ_2) son compactos.*

Lema 1.4. *Sea (X, τ_1, τ_2), si X es compacto por pares, entonces X es bi-compacto.*

Demostración. Mostraremos la compacidad para (X, τ_1), lo mismo se dará para (X, τ_2).
Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de X, por abiertos de τ_1 se tiene entonces que $\{U_i\}_{i \in I} \in \tau_1 \subseteq \tau_1 \cup \tau_2$, luego, al ser X compacto por pares, existirá un sub-cubrimiento finito de dicho cubrimiento, de donde se sigue que (X, τ_1) es compacto. La compacidad de (X, τ_2) es análoga, se sigue entonces (X, τ_1, τ_2) bi-compacto. □

Definición 1.18. *Sea (X, τ_1, τ_2), definimos los conjuntos*

$$\sigma_1 = \{U \subseteq X : U \text{ es compacto para } \tau_1\}.$$

y, análogamente

$$\sigma_2 = \{U \subseteq X : U \text{ es compacto para } \tau_2\}.$$

Teorema 1.2. *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bi-topológico, entonces, (X, τ_1, τ_2) es un espacio compacto por pares si y sólo si, $\delta_1 \subseteq \sigma_2$ y $\delta_2 \subseteq \sigma_1$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que (X, τ_1, τ_2) es un espacio compacto por pares, mostraremos que $\delta_1 \subseteq \sigma_2$. Para $\delta_2 \subseteq \sigma_1$ la prueba es análoga.
Consideremos $A \in \delta_1$ y sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de τ_2, entonces, se tiene que

$$X = A^c \cup \bigcup_{i \in I} U_i$$

Es un cubrimiento por abiertos de $\tau_1 \cup \tau_2$. Puesto que (X, τ_1, τ_2) es compacto por pares, existe un sub-cubrimiento finito $A^c \cup \{U_1, .., U_n\}$ de X.
Luego

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

de donde se sigue que $A \in \sigma_2$.

$\Leftarrow$) Recíprocamente supongamos que $\delta_1 \subseteq \sigma_2$ y $\delta_2 \subseteq \sigma_1$, veamos que (X, τ_1, τ_2) es compacto por pares.
Consideremos $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{V_j\}_{j\in J} \subseteq \tau_1 \cup \tau_2$ de manera tal que

$$X = (\bigcup_{i\in I} U_i) \cup (\bigcup_{j\in J} V_j)$$

Consideremos $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ es claro que $U^c \in \delta_1 \subseteq \sigma_2$, y además $U^c \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$, por lo cual, existen $V_1 \cdots V_n$ tal que $U^c = \bigcup_{i=1}^n V_i$.
Consideremos $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$, entonces $U \cup V = X$. Es claro que $V^c \in \delta_2 \subseteq \sigma_1$ y además, $V^c \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Por lo cual, existen $U_1 \cdots U_k$ tal que $V^c \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$. Se sigue entonces, que $\{U_1, \cdots, U_k\} \cup \{V_1, \cdots, V_n\}$ es un sub cubrimiento finito por elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$, y por lo tanto, (X, τ_1, τ_2) será compacto por pares. □

Definición 1.19. *Sea (X, τ_1, τ_2), un espacio bi-topológico, diremos que es un espacio de Stone por pares si verfica:*

- (X, τ_1, τ_2) *es compacto por pares.*
- (X, τ_1, τ_2) *es Hausdorff por pares.*
- (X, τ_1, τ_2) *es cero dimensional por pares.*

Definición 1.20. *Sean (X, τ_1, τ_2) y (X', τ_1', τ_2') dos espacios bi-topológicos, y sea $f : X \to X'$, una aplicación, diremos que f es bi-continua, si es continua para ambas topologías.*

Definición 1.21. *Definimos entonces la categoría **PStone** cuyos objetos son los espacios de Stone por pares, y cuyos morfismos son las funciones bi-continuas.*

Capítulo 2

Espacios Stone por pares, espacios de Priestley y espacios espectrales

En el presente capítulo nos damos a la tarea de establecer isomorfismos entre la categoría de los espacios de Stone por pares, y la categoría de los espacios de Priestley y espectrales.
En una primera sección estableceremos un isomorfismo que nos permitirá ver a los espacios de Stone por pares, como un espacio de Priestley y de manera recíproca a los espacios de Priestley verlos como espacios de Stone por pares. De igual modo podremos ver a las funciones bi-continuas como morfismos entre los espacios de Priestley y visceversa.
La segunda sección de este capítulo tiene el mismo objetivo que la primera, establecer un isomorfismo entre la categoría de los espacios de Stone por pares y la categoria de los espacios espectrales. En vista de las secciones 1 y 2, se puede concluir bajo la composición de funtores, un isomorfismo entre las categorías de espacios de Priestley y espacios espectrales, respectivamente, resultado obtenido por Cornish en [4].

2.1. Espacios de Stone por pares y espacios de Priestley

Mostraremos entonces que la categoría **PStone** de espacios de Stone por pares, cuyos morfismos son las funciones bi-continuas, es isomorfa a la categoría **Pries** de espacios de Priestley cuyos morfismos son las funciones continuas que preservan el orden.

Definición 2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $U \subseteq X$ se dirá clopen, si es abierto y cerrado simultáneamente.*

Definición 2.2. *Sea X un conjunto no vacío, diremos que una relación, $\leq$ es de orden parcial si verfica*

- *Reflexiva* $(\forall x \in X)$ $(x \leq x)$.
- *Anti-simétrica* $(\forall x, y \in X)$ *si* $(x \leq y \Rightarrow y \nleq x)$.
- *Transitiva* $(\forall x, y, z \in X)$ *si* $(x \leq y \ \wedge \ y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

El par $(X, \leq)$ es lo que llamaremos un conjunto parcialmente ordenado, o bien poset (partial ordered set).

Definición 2.3. *Sean $(X, \leq)$ $(Y, \leq)$ dos conjuntos ordenados, una aplicación $f : X \to Y$ se dirá monótona creciente si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. La aplicación f se dirá isomorfismo de orden, si para cualquier par de puntos $x, y \in X$, se verifica $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.*
Diremos que dos conjuntos parcialmente ordenados son isomorfos, si existe un isomorfismo de orden entre ellos, y lo inidcaremos como $X \simeq Y$.

Definición 2.4. *Sea X un conjunto parcialmente ordenado y sea $Y \subseteq X$, diremos que :*

- *Y es creciente, si $y \in Y$, $y \leq x \Rightarrow x \in Y$.*
- *Y es decreciente si $y \in Y$, $x \leq y \Rightarrow x \in Y$.*

Definición 2.5. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $Y \subseteq X$ un sub-conjunto, definimos los conjuntos creciente y decreciente generados por Y como*

$$\uparrow(Y) = \{x \in X : \exists y \in Y : y \leq x\} \quad \downarrow(Y) = \{x \in X : \exists y \in Y : x \leq y\}.$$

respectivamente.

Definición 2.6. *Diremos que una terna $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de Priestley, si es un espacio topológico parcialmente ordenado, que verifica las siguientes condiciones:*

- *$(X, \tau, \leq)$ es compacto.*
- *Si $x \nleq y$ entonces, existe un clopen creciente, de manera tal que $x \in U$ y $y \notin U$.*

En otras palabras, un espacio topológico compacto, totalmente disconexo en el orden.

Lema 2.1. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, entonces:*

1. *(X, τ) es un espacio de Stone.*
2. *Si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $\uparrow(F) \downarrow(F)$ son cerrados.*
3. *Todo abierto creciente, es unión de clopens crecientes, todo cerrado creciente es intersección de clopens crecientes. Todo abierto decreciente, es unión de clopens decrecientes, y cada cerrado decreciente es intersección de clopens decrecientes.*

Demostración. La demostración del Lema puede encontrarse en [12]. □

Definición 2.7. *Sean $(X, \tau, \leq)$ y $(X', \tau', \leq')$ dos espacios de Priestley. Una aplicación $f : X \to X'$ diremos que es un morfismo de espacios de Priestley si es continua y preserva el orden.*

Definición 2.8. *Definimos entonces **Pries** la categoría cuyos objetos son los espacios de Priestley y los morfismos son las funciones continuas que preservan el orden.*

Definición 2.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico, definimos el orden de especialización asociado a τ, de la siguiente manera*

$$x \leq y \Leftrightarrow x \in Cl(y) \Leftrightarrow (\forall U \in \tau)(x \in U \Rightarrow y \in U).$$

Observación 2.1. *Para el orden inducido por una topología inmediato verificar que es un orden parcial cuando el espacio es T_0. Ademas, todo abierto es naturalmente creciente para este orden.*

Lema 2.2. *Sean (X, τ_1, τ_2) un espacio bi-topológico y $\leq_1$ $\leq_2$ los órdenes de especialización de cada topología respectivamente, si (X, τ_1, τ_2) es cero dimensional por pares entonces, $\leq_1 = \geq_2$.*

Demostración. Supongamos que $(x, y) \in \leq_1$ entonces por definición,

$$\begin{aligned} (\forall U \in \tau_1)(x \in U \Rightarrow y \in U) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall U \in \beta_1)(x \in U \Rightarrow y \in U) \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall U \in \beta_1)(y \in U^c \Rightarrow x \in U^c). \end{aligned}$$

Puesto que X es cero dimensional por pares, se tiene que $U^c \in \beta_2$ por lo cual $(x, y) \in \geq_2$. □

Definición 2.10. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, definimos*

- *$CpUp = \{U \subseteq X : U$ es clopen creciente $\}$.*

- *OpUp* $= \{U \subseteq X : U$ *es abierto y creciente* $\}$.
- *ClUp* $= \{U \subseteq X : U$ *es cerrado y creciente* $\}$.
- *CpDo* $= \{U \subseteq X : U$ *es clopen decreciente* $\}$.
- *OpDo* $= \{U \subseteq X : U$ *es abierto y decreciente* $\}$.
- *ClDo* $= \{U \subseteq X : U$ *es cerrado y decreciente* $\}$.

Para un espacio bi-topológico de Stone por pares (X, τ_1, τ_2) consideramos $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$ y el orden de especialización para τ_1, digamos $\leq = \leq_1 = \geq_2$.

Teorema 2.1. *Si* (X, τ_1, τ_2) *es un espacio bi-topológico de Stone por pares, entonces* $(X, \tau, \leq)$ *es un espacio de Priestley, más aún:*

1 $CpUp(X, \tau, \leq) = \beta_1$

2 $OpUp(X, \tau, \leq) = \tau_1$

3 $ClUP(X, \tau, \leq) = \delta_2$

4 $CpDo(X, \tau, \leq) = \beta_2$

5 $OpDo(X, \tau, \leq) = \tau_2$

6 $ClDo(X, \tau, \leq) = \delta_1$

Demostración. Puesto que (X, τ_1, τ_2) es compacto por pares, por la observación 1.4 es supremo compacto, y así, será (X, τ) compacto. Por otro lado, puesto que (X, τ_1, τ_2) es de Stone por pares, entonces es un espacio Hausdorff por pares, y, por el Lema 1.3, se sigue que (X, τ_1) es T_0 y por tanto, la relación $\leq$ es de orden parcial.

Sean $x, y \in X$, de manera tal que $x \not\leq y$, por definición $x \not\leq_1 y$, y por lo cual, existe $U \in \beta_1$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Además, por la observación 1.3 $U^c \in \beta_2$ ambos, abiertos para (X, τ) y por lo cual, $U \in ClUp(X, \tau)$ y así, por la observación 2.1 se verifica el axioma de separación de Priestley y hemos mostrado, en consecuencia que $\beta_1 \subseteq CpUp(X)$.
Sea $A \in CpUp(X, \tau, \leq)$ mostraremos que $A = \bigcup\{U \in \beta_1 : U \subseteq A\}$. El hecho de que $\bigcup\{U \in \beta_1 : U \subseteq A\} \subseteq A$ es inmediato.

Sea $x \in A$, y sea $y \in A^c$, entonces, tenemos que $x \not\leq y$, luego, por definición, $x \not\leq_1 y$, y por lo tanto, existe $U_y \in \beta_1$ de manera tal que $x \in U_y$ $y \notin U_y$. Se sigue de lo anterior, que $A^c \cap \bigcap_{y \in A^c} U_y = \emptyset$, por lo cual, $\{A^c\} \cup \{U_y : y \in Y\}$ es una familia de cerrados de X, con intersección vacía. Como X es compacto, existen $U_1, \cdots, U_n \in \beta_1$ de manera tal que $A^c \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n = \emptyset$. Por lo tanto, $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n \subseteq A$, ya que β_1 es cerrado bajo intersecciones finitas, $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \beta_1$, y así, $x \in U \subseteq A$, por lo cual $A = \bigcup\{U \in \beta_1 : U \subseteq A\}$ Ya que A es cerrado, y X es compacto, entonces, A es compacto, y existe un sub-cubrimiento finito por elementos de β_1 entonces, $A \in \beta_1$ como queríamos mostrar.
La prueba de (2), es inmediata considerando el Lema 2.1, y el hecho de que β_1 es una base para τ_1. Para (3), sea $U \in ClUp(X)$, entonces, por Lema 2.1, y considerando $V_i \in \beta_1$, para cada i, se obtiene

$$\begin{aligned} U = \bigcap_{i \in I} V_i \quad &\Leftrightarrow \quad U^c = \bigcup_{i \in I} V_i^c \\ &\Leftrightarrow \quad U^c \in \tau_2 \\ &\Leftrightarrow \quad U \in \delta_2. \end{aligned}$$

Las pruebas de 4,5 y 6, se pueden obtener de manera similar a 1, 2 y 3, respectivamente. □

Establecida una relación entre los espacios bi-topológicos Stone por pares y los espacios de Priestley, es natural que haya alguna relación entre las funciones bi continuas y las aplicaciones continuas que preservan el orden.

Teorema 2.2. *Sea $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (X', \tau_1', \tau_2')$ una función bi-continua entre espacios de Stone por pares, entonces $f : (X, \tau, \leq) \to (X', \tau', \leq')$ es una función continua entre los espacios de Priestley asociados que además preserva el orden.*

Demostración. Consideremos $U \in \tau_1$ y $V \in \tau_2$, de donde se obtiene el básico $U \cap V$ para $(X', \tau', \leq')$. Dado que f es bi-continua, se sigue que $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ es un básico de $(X, \tau, \leq)$, y por lo tanto, f resulta continua.
Por otro lado, consideremos $x \leq y$ en $(X, \tau, \leq)$, y supongamos por absurdo que $f(x) \nleq f(y)$, por lo cual, existe $V \in \tau_1'$ con $f(x) \in V$ y $f(y) \notin V$, pero al ser $f^{-1}(V) = U \in \tau_1$ y $x \leq_1 y$ deberá ser $f(y) \in V$, lo que es imposible, se sigue que f preserva el orden.

□

Definición 2.11. *Sean **PStone** y **Pries** las categorías de los espacios de Stone por pares y espacios de Priestley respectivamente, definimos el funtor*

$$\Phi : \textbf{\textit{PStone}} \to \textbf{\textit{Pries}}.$$

$$\Phi((X, \tau_1, \tau_2)) \to (X, \tau, \leq).$$

Más aún, para $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (X, \tau_1', \tau_2')$ una función continua, $\Phi(f) = f$ es una función continua sobre los espacios de Priestley asociados.

Veamos ahora, el proceso inverso, es decir, a partir de un espacio de Priestley debemos crear un espacio de Stone por pares. Lo haremos de la siguiente manera, a partir del espacio de Priestley $(X, \tau, \leq)$, construiremos el espacio bi-topológico (X, τ_1, τ_2) con $(X, \tau_1) = OpUp(X)$ y $(X, \tau_2) = OpDo(X)$. Tendremos entonces, el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y sean $(X, \tau_1) = (X, OpUp(X))$ $(X, \tau_2) = (X, OpDo(X))$, entonces (X, τ_1, τ_2) es un espacio de Stone por pares, más aún, se tiene que*

1 $\beta_1 = CpUp(X)$.

2 $\beta_2 = CpDo(X)$.

3 $\leq = \leq_1 = \geq_2$.

Demostración. Notemos que, en efecto, las familias de subconjuntos consideradas son topologías, probaremos entonces que (X, τ_1, τ_2) es un espacio compacto por pares, Hausdorff por pares y cero dimensional por pares.
Puesto que $(X, \tau, \leq)$ es compacto y $\tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \tau$ entonces, (X, τ_1, τ_2) será compacto por pares.
Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, podemos suponer que $x \nleq y$. Por el axioma de separación de Priestley, existe un clopen creciente U de manera tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Puesto que $U \in \tau_1$, notemos que U^c es un clopen decreciente, entonces $U^c \in \tau_2$, de donde se sigue entonces que (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares. Notemos entonces que se veririfica (1), en efecto

$$\begin{aligned} U \in \beta_1 &\Leftrightarrow U \in \tau_1 \cap \delta_2 \\ &\Leftrightarrow U \in OpUp(X, \tau, \leq) \cap ClUp(X, \tau, \leq) \\ &\Leftrightarrow U \in CpUp(X, \tau, \leq). \end{aligned}$$

De igual modo, puede probarse (2). Para el inciso (3), notemos que, por el axioma de separación de Priestley

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow (\forall U \in OpUp(X,\tau,\leq))(x \in U \Rightarrow y \in U) \\ &\Leftrightarrow (\forall U \in \tau_1)(x \in U \Rightarrow y \in U) \\ &\Leftrightarrow x \leq_1 y. \end{aligned}$$

El hecho de que (X,τ_1,τ_2) es un espacio cero dimensional por pares, se deduce de 1 y 2, y del Lema (3.1)

□

Teorema 2.4. *Sean $(X,\tau,\leq)$ y $(X',\tau',\leq')$ dos espacios de Priestley, y sean (X,τ_1,τ_2) y (X',τ_1',τ_2') sus espacios de Stone por pares asociados a ellos. Sea $f : X \to X'$ una función continua y que preserva el orden, entonces, f es una función bi-continua entre (X,τ_1,τ_2) y (X',τ_1',τ_2').*

Demostración. Notemos que, si $V \in \beta_1'$ entonces, al ser f continua y que preserva el orden, se obtiene que $f^{-1}(V) = U \in \beta_1$, luego, f es continua para τ_1, de igual manera, se prueba que f es continua para (X,τ_2) y (X',τ_2') de donde, se sigue que f es bi-continua. □

Definición 2.12. *Consideremos las categorías **Pries** y **PStone**, definimos el funtor*

$$\Psi : \textbf{\textit{Pries}} \to \textbf{\textit{PStone}}$$

$$(X,\tau,\leq) \to (X,\tau_1,\tau_2)$$

Más aún, para una función $f : X \to X'$ que es continua y preserva el orden, la funcion $\Psi(f) = f$ es una función bi-continua entre los espacios de Stone por pares asociados a X, X' respectivamente.

Teorema 2.5. *Sean **Pries** y **PStone** las categorías de los espacios de Priestley y los espacios de Stone por pares, respectivamente. Los funtores Φ y Ψ definen un isomorfismo entre dichas categorías.*

Demostración. Notemos que, dado un espacio de Priestley $(X,\tau,\leq)$, se tiene que

$$\Phi(\Psi(X,\leq,\tau)) = \Phi(X,\tau_1,\tau_2) = (X,\tau,\leq).$$

Y, de manera análoga, dado un espacio par-Stone (X,τ_1,τ_2) se tiene que

$$\Psi(\Phi(X,\tau_1,\tau_2)) = \Psi(X,\leq,\tau) = (X,\tau_1,\tau_2).$$

Por lo cual, ambas categorías, son isomorfas. □

En los siguientes diagramas podemos observar la accion de los funtores Φ y Ψ respectivamente.

$$\begin{tikzcd} (X,\tau,\leq) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi"'] & (X',\tau',\leq') \arrow[d, "\Psi"] \\ (X,\tau_1,\tau_2) \arrow[r, "\Psi(f)=f"'] & (X',\tau_1',\tau_2') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X,\tau_1,\tau_2) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & (X',\tau_1',\tau_2') \arrow[d, "\Phi"] \\ (X,\tau,\leq) \arrow[r, "\Phi(f)=f"'] & (X',\tau',\leq') \end{tikzcd}$$

2.2. Espacios de Stone por pares y espacios Espectrales

En la presente sección desarrollaremos la dualidad entre las categorías **PStone** y **Spec**, será necesario entonces, establecer que entenderemos por espacios espectrales.

Definición 2.13. *Sea (X,τ) un espacio topológico, diremos que es coherente si el conjunto*

$$\epsilon(X) = \{U \in \tau : U \text{ es compacto}\}.$$

Es cerrado por intersecciones finitas y además, es una base para (X,τ).

Definición 2.14. *Sea (X,τ) un espacio topológico, diremos que $U \subseteq X$ es irreducible, si $F, G \subseteq X$ cerrados, de manera tal que $U = F \cup G$ entonces, $U = F$ o bien, $U = G$.*

Observación 2.2. *Notemos que, si U es irreducible, entonces, es irreducible en el retículo de los conjuntos cerrados para (X,τ), y por ser un retículo distributivo, es equivalente a ser primo, es decir, si $U \subseteq F \cup G$ entonces $U \subseteq F$ o bien $U \subseteq G$.*

Definición 2.15. *Sea (X,τ) un espacio topológico, diremos que X es sober, si todo cerrado irreducible es clausura de un punto.*

Definición 2.16. *Sea (X,τ) un espacio topológico, diremos que es un espacio espectral si verifica*

1 X es T_0.

2 X es coherente.

3 X es sober.

4 X es compacto.

Definición 2.17. *Sean (X,τ) y (X',τ') dos espacios espectrales, y sea*

$$f : (X,\tau) \to (X',\tau').$$

una función, diremos que es una función espectral si la preimagen de un conjunto abierto y compacto, es abierto y compacto.

Definición 2.18. *Definimos entonces **Spec** la categoría cuyos objetos son los espacios espectrales y los morfismos son las funciones espectrales.*

Teorema 2.6. *Sea (X,τ_1,τ_2) un espacio de Stone por pares, entonces (X,τ_1) es un espacio espectral, más aún, $\epsilon(X) = \beta_1$.*

Demostración. Notemos que, simplemente nos hemos deshecho de la topología (X,τ_2), y puesto que (X,τ_1,τ_2) es un espacio de Stone por pares, se tiene, por Lema 1.3, que (X,τ_1) es un espacio T_0. Por otro lado, siendo (X,τ_1,τ_2) compacto por pares, por Lema 1.4 , (X,τ_1) es compacto.
Veamos ahora que (X,τ_1) es coherente. Notemos que, si $U \in \beta_1$ entonces, $U \in \tau_1 \cap \delta_2$. Puesto que $\delta_2 \subseteq \sigma_1$ se tiene que $U \in \tau_1 \cap \sigma_1 = \epsilon(X)$, entonces $\beta_1 \subseteq \epsilon(X)$. Por otro lado, sea $U \in \epsilon(X)$, como U es abierto, entonces, U es unión de los elementos de β_1, y al ser compacto, se tiene que $U = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ donde $V_1, \cdots, V_n \in \beta_1$, de donde se sigue entonces que $U \in \beta_1$ entonces, $\beta_1 = \epsilon(X)$, y así, (X,τ_1) es coherente.

Restará probar que (X,τ_1) es sober. Consideremos $F \subseteq X$ cerrado irreducible, por la observación 2.2, F es primo en el retículo de τ_1 cerrados, veamos que entonces, coincide con la clausura de un punto de F. Si este no fuera el caso, entonces para cada $x \in F$ existe $y \in F$ tal que $y \notin Cl(x)$. Por lo cual, existe un entorno $U_y \in \beta_1$ de manera tal que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$. Consideremos $U_x = U_y^c$, luego, $x \in U_x$ y además $U_x \in \beta_2$. Luego, $F \subseteq \bigcup_{x\in F} U_x$, y puesto que F es τ_1 cerrado, se sigue por Teorema 1.2, se sigue que $F = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Puesto que F es primo, existe un índice k, de manera tal que $F \subseteq U_{x_k}$, entonces, $y_k \in F \subseteq U_{x_k}$ lo que resulta imposible, entonces F coincide con la clausura de un punto, luego (X,τ_1) es un espacio sober, y así, un espacio espectral. ☐

Teorema 2.7. *Sean (X,τ_1,τ_2), (X',τ_1',τ_2') dos espacios de Stone por pares, y sean (X,τ_1) (X',τ_1') sus respectivos espacios espectrales asociados. Sea*

$$f : (X,\tau_1,\tau_2) \to (X',\tau_1',\tau_2').$$

una función bi-continua, entonces f es una funcion espectral.

Demostración. Probaremos que, si $V \in \epsilon(X')$ entonces, $f^{-1}(V) \in \epsilon(X)$. Notemos que

$$\begin{aligned} V \in \epsilon(X') &\Leftrightarrow V \in \beta_1' \\ &\Leftrightarrow V \in \tau_1' \cap \delta_2' \\ &\Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_1 \cap \delta_2 \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \beta_1 \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \epsilon(X). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que f es una aplicación espectral. □

Definición 2.19. *Sean **PStone** y **Spec** las categorías de los espacios de Stone por pares y espectrales respectivamente, definimos entonces el funtor*

$$F : \textbf{\textit{PStone}} \to \textbf{\textit{Spec}}.$$

$$F((X,\tau_1,\tau_2)) \to (X,\tau_1).$$

Más aún, si $f : (X,\tau_1,\tau_2) \to (X,\tau_1',\tau_2')$ es una función bi-continua entre espacios de Stone por pares, entonces $F(f) = f$ es una función espectral entre los espacios espectrales asociados.

Haremos ahora, el proceso inverso, a partir de un espacio espectral, nos crearemos un espacio de Stone por pares, y mostraremos que ambas categorías son isomorfas.
Sea (X,τ) un espacio espectral, definimos $\tau_1 = \tau$, que es la topología generada por la base $\epsilon(X) = \{U \in \tau : U \text{ es compacto}\}$, y definimos por otro lado, τ_2, la topología generada por la base

$$\Delta(X) = \{U^c : U \in \epsilon(X)\}.$$

Es inmediato verificar que $\Delta(X)$ es una base para una topología sobre X, teniendo entonces el siguiente resultado

Teorema 2.8. *Sea (X,τ) un espacio espectral, entonces, (X,τ_1,τ_2) es un espacio de Stone por pares. Más aún, se tiene que*

1 $\beta_1 = \epsilon(X)$.

2 $\beta_2 = \Delta(X)$.

Demostración. Veamos primero que (X,τ_1,τ_2) es compacto por pares. Para esto, utilizaremos la caracterización de compacidad obtenida en el Teorema 1.1. Sea K una familia de cerrados $K \subseteq \epsilon(X) \cup \Delta(X)$, de manera tal que posee la PIF, mostraremos que $\bigcap_{U\in K} U \neq \emptyset$. Consideremos además $\delta = \{U \subseteq X : U \text{ es cerrado para}(X,\tau)\}$, se deduce entonces que $K \subseteq \epsilon(X) \cup \delta$.
Para mostrar que $\bigcap_{U\in K} U \neq \emptyset$, por el Lema de Zorn, extendemos K, a una familia maximal de cerrados $M \subseteq \epsilon(X) \cap \delta$ con la PIF, y usamos $C = \bigcap_{U\in M\cap\delta} U$.
Puesto que C es un cerrado para (X,τ) será entonces compacto y por tanto, será no vacío. Además, la colección $M \cup \{C\}$ posee la PIF, y por la maximalidad de M , deberá ser $C \in M$.
Mostraremos ahora, que C es irreducible, en efecto, puesto que, si $C = A \cup B$ con $A, B \in \delta$, supongamos que en ambos casos, $M \cup \{A\}$ y $M \cup \{B\}$, no poseen PIF, entonces, existen $A_1, \cdots, A_n$ y $B_1, \cdots, B_k \in M \cap \delta$ de manera tal que

$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A) = (\bigcap_{i=1}^{k} B_i \cap B) = \emptyset.$$

Lo cual implica que

$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{k} B_i) \cap C = \emptyset.$$

Lo que es imposible, luego, se sigue que ó bien $M \cup \{A\}$, ó bien $M \cup \{B\}$ tienen la PIF y por la maximalidad de M, será $A \in M$ o $B \in M$, luego, por la elección de C, se tiene que $C \subseteq A$ o bien $C \subseteq B$, de donde se sigue que $C = A$ o bien $C = B$ por lo cual, C es irreducible. Puesto que (X, τ) es sober, tendremos que $C = Cl(x)$ para algún punto $x \in X$, es claro que $x \in F$ para todo $F \in M \cap \delta$ por ser $C \subseteq F$ para todo $F \in M$.
Más aún, para cada $U \in M \cap \epsilon(X)$, tendremos que $U \cap C = U \cap Cl(x) \neq \emptyset$, ya que U es abierto para (X, τ), esto implica que $x \in U$, por lo tanto, $x \in \bigcap_{V \in M} V$ lo que implica $\bigcap_{U \in K} U \neq \emptyset$, en consecuencia, se tiene que (X, τ_1, τ_2) es compacto por pares.

Veamos ahora, que (X, τ_1, τ_2) es cero dimensional por pares, en efecto, bastará probar 1 y 2. De la misma definición de τ_2 notamos que $\epsilon(X) \subseteq \delta_2$ y por lo tanto, tendremos que $\epsilon(X) \subseteq \beta_1 = \tau_1 \cap \delta_2$.
Por otro lado, se tiene que $\beta_1 = \tau_1 \cap \delta_2 \subseteq \tau_1 \cap \sigma_1 = \epsilon(X)$, luego, se tiene que $\beta_1 = \epsilon(X)$, más aún

$$\begin{aligned} U \in \Delta(X) \quad &\Leftrightarrow \quad U^c \in \tau_1 \cap \delta_2 \\ &\Leftrightarrow \quad U \in \tau_2 \cap \delta_1 = \beta_2. \end{aligned}$$

así, $\Delta(X) = \beta_2$ y por último, considerando el Lema 1.3, (X, τ_1) T_0 y (X, τ_1, τ_2) cero dimensional por pares, se sigue que es Hausdorff por pares, y así, es un espacio de Stone por pares. □

Además, dados dos espacios espectrales, y una función espectral, sería esperable que exista una funcíon bi continua entre sus espacios de Stone por pares asociados, la respuesta es afirmativa, y lo mostramos en el siguiente resultado.

Teorema 2.9. *Sean (X, τ) y (X', τ') dos espacios espectrales, y*

$$f : (X, \tau) \to (X', \tau')$$

una función espectral. Sean (X, τ_1, τ_2) y (X', τ_1', τ_2') sus espacios de Stone por pares asociados, entonces f es una función bi-continua entre ellos.

Demostración. Notemos que, al ser f una función espectral y $(X, \tau) = (X, \tau_1)$, $(X', \tau') = (X', \tau_1')$ entonces, se tiene que, $V \in \epsilon(X') \Leftrightarrow V \in \beta_1'$, por lo tanto, al ser f espectral, $f^{-1}(V) \in \epsilon(X) = \beta_1$, será f continua para (X, τ_1) y (X, τ_1') respectivamente.
Por otro lado, sea $U \in \Delta(X')$ se tiene entonces que $U^c \in \beta_1'$ y entonces $f^{-1}(U) = f^{-1}((U^c)^c) = f^{-1}(U^c)^c \in \beta_2 = \Delta(X)$, ya que $f^{-1}(U^c) \in \beta_1$.
Se sigue entonces, que f es una función bi-continua entre los espacios de Stone por pares.

□

Definición 2.20. *Sean **Spec** y **PStone** las categorías de los espacios espectrales y los espacios de Stone por pares, respectivamente, definimos el funtor*

$$G : \textbf{Spec} \to \textbf{PStone}.$$

$$(X, \tau) \to (X, \tau_1, \tau_2).$$

Más aún, para una función espectral $f : X \to X'$, se obtiene $G(f) = f$ una función bi-continua entre los espacios de Stone por pares asociados.

Teorema 2.10. *Sean **Spec** y **PStone** las categorías de los espacios espectrales y los espacios de Stone por pares, respectivamente, los funtores **F** y **G** definen un isomorfismo entre ambas categorías.*

Demostración. Ya hemos probado, la buena definición de ambos funtores , además notemos que

$$F(G((X,\tau))) = F((X,\tau_1,\tau_2)) = (X,\tau).$$

De igual manera

$$G(F(X,\tau_1,\tau_2))) = G((X,\tau)) = (X,\tau_1,\tau_2).$$

Por lo cual, ambos funtores establecen un isomofismo entre ambas categorías. □

En los siguientes diagramas pueden observarse las acciones de los funtores F y G, respectivamente.

$$\begin{tikzcd} (X,\tau_1,\tau_2) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & (X',\tau_1',\tau_2') \arrow[d, "F"] \\ (X,\tau_1) \arrow[r, "F(f)=f"'] & (X',\tau_1') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "G"'] & (X',\tau') \arrow[d, "G"] \\ (X,\tau_1,\tau_2) \arrow[r, "G(f)=f"'] & (X',\tau_1',\tau_2') \end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Dualidades topológicas y bi-topológicas para retículos distributivos

En el desarrollo del presente capítulo estudiamos la equivalencia dual existente entre retículos distributivos y diferentes tipos espacios topológicos, y bi-topológicos, razón por la cual, el presente capítulo se divide en secciones, para una mejor organización del contenido.

3.1. Retículos distributivos

Recordemos que, una relación $\leq$ definida sobre un conjunto no vacío es de orden parcial, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Además una aplicación $f : X \to Y$, entre dos conjuntos parcialmente ordenados, se dirá monótona si preserva los órdenes, es decir, si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Definición 3.1. *Sea X un poset, diremos que X es un retículo si para cualquier sub-conjunto finito existe el supremo y el ínfimo.*
Diremos que un retículo es completo si para cualquier sub-conjunto, existe el supremos y ínfimo.

Podemos además, dar una definición algebraica de la estructura de los retículos, como sigue.

Definición 3.2. *Sea $< L, \vee, \wedge >$ un álgebra de tipo (2,2), diremos que es un retículo si verifica:*

- *Asociatividad.*
- *Conmutatividad.*
- *Absorción.*
- *Idempotencia.*

Observación 3.1. *Las definiciones son equivalentes y se trabajará con ambas en todo momento, sin hacer uso exclusivo de una sola definición.*
Sólo basta con definir el siguiente orden para ver la equivalencia de las definiciones

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Definición 3.3. *Diremos que un retículo L es acotado si posee primer y último elemento, a los que indicaremos como 0 y 1, respectivamente.*

Observación 3.2. *En adelante, la locución retículo distributivo, hará referencia en todo momento a retículos acotados.*

Definición 3.4. *Sean $L_1 L_2$ dos retículos, diremos que una aplicación*

$$h : L_1 \to L_2.$$

es un homomorfismo de retículos si verifica:

- $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$.
- $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$.

Definición 3.5. *Sea L un retículo, se dirá distributivo si para cada $a, b, c \in L$ se verifican las identidades $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ y además $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.*

Definición 3.6. *Definimos la categoría **DLat** de retículos distributivos, cuyos morfismos son los homomorfismos de retículos.*

3.2. Filtros e Ideales

En ésta sección trabajaremos sobre la estructura algebraica de los retículos, y mostraremos el teorema de representación por filtros primos de los retículos distributivos, el cual será fundamental en el desarrollo de las equivalencias duales de interés. Para una lectura mas exhaustiva del tema, ver [1]

Definición 3.7. *Sea L un retículo, un sub-conjunto $F \subseteq L$ es un filtro si verfica*

- *F es un conjunto creciente.*
- *Si $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$.*

Un sub-conjunto $I \subseteq L$ es un ideal si verifica:

- *Es un conjunto decreciente.*
- *Si $x, y \in I$ entonces $x \vee y \in I$.*

Indicaremos como $Fi(L) = \{F \subseteq L : F \text{ es filtro}\}$. Además $Id(L) = \{I \subseteq L : I \text{ es ideal de } L\}$ indicará el conjunto de todos los ideales de L.

Observación 3.3. *Notemos que, si un filtro contiene al primer elemento, entonces es trivialmente todo el retículo. De igual manera, si un ideal contiene al último elemento, es todo el retículo.*

Lema 3.1. *Sea L un retículo, y sea $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de filtros, entonces, $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha$ es filtro.*

Definición 3.8. *Sea L un retículo, y $H \subseteq L$ un sub-conjunto de L, definimos el filtro generado por H como*

$$< H >_f = \bigcap \{F : H \subseteq F \text{ y } F \text{ es filtro}\}.$$

De igual manera definimos el ideal generado por un sub-conjunto.

Proposición 3.1. *Sea L un retículo, y $H \subseteq L$ entonces*

$$< H >_f = \{x \in L : \exists h_1, \cdots, h_n : h_1 \wedge \cdots \wedge h_n \leq x\}.$$

Demostración. Sea $x \in L$ de manera tal que para cada $\{a_1 \cdots a_n\} \subseteq A$ se tiene $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \not\leq x$. Consideremos entonces $F = \uparrow (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)$ y por otro lado, $I = \downarrow (x)$. Es inmediato verificar que $F \cap I = \emptyset$ y además $A \subseteq F$, y por Teorema 3.2 existe $Z \in X(L)$ tal que $F \subseteq Z$ y $Z \cap I = \emptyset$, de donde se sigue que $x \notin \bigcap\{F \in Fi(L) : A \subseteq F\}$.
Por otro lado, sea $x \in L$ de manera tal que, existen $a_1 \cdots a_n \in A$ con $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq x$, y consideremos $F \in Fi(L)$ tal que $A \subseteq F$. Dado que $A \subseteq F$ es inmediato verificar que $x \in F$, de donde se sigue la igualdad.

□

Lema 3.2. *Sea L un retículo, entonces $< Fi(L), \wedge, \vee >$ es un retículo, donde las operaciones son:*

- *Para $F_1, F_2 \in Fi(L)$ se define $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$.*
- *Para $F_1, F_2 \in Fi(L)$ se define $F_1 \vee F_2 =< F_1 \cup F_2 >_f$ es decir, el filtro generado por la unión de los dos filtros.*

Teorema 3.1. *Sea L un retículo, son equivalentes*

- *L es distributivo.*
- *Sean $F, H \in Fi(L)$ entonces $F \vee H = \{x \in L : \exists f \in F, h \in H : x = f \wedge h\}$.*
- *$Fi(L)$ es un retículo distributivo.*

Demostración. Ver [15]. □

Definición 3.9. *Sea L un retículo, y $F \subseteq L$ un filtro, diremos que*

- *F es irreducible si $F = H_1 \cap H_2 \Rightarrow F = H_1$ o bien $F = H_2$.*
- *F es Primo si $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ o bien $b \in F$.*
- *F es maximal si $F \subseteq H$ entonces $F = H$ o bien $H = L$.*

De manera análoga definimos I ideal es

- *Irreducible $I = I_1 \cap I_2$ entonces $I = I_1$ o bien $I = I_2$.*
- *Primo si $a \wedge b \in I$ entonces $a \in I$ ó bien $b \in I$.*
- *Maximal si $I \subseteq J$ entonces $I = J$ o bien $I = L$.*

Lema 3.3. *Sea L un retículo distributivo, entonces*

1 F es un filtro primo si y sólo si $L - F$ es un ideal primo.

2 Todo filtro maximal es primo.

3 Todo filtro irreducible es primo.

Demostración. 1) $\Rightarrow$), consideremos P un filtro primo, es claro que P^c es un conjunto decreciente. Sean $x, y \in P^c$ y supongamos que $x \vee y \in P$. Dado que P es primo, $x \in P$ o bien $y \in P$, lo que resulta imposible, por lo tanto $x \vee y \in P$. Por último, consideremos $x \wedge y \in P^c$, con $x, y \in P$, se sigue entonces que $x \wedge y \in P$ lo que resulta imposible, así P^c es ideal primo.
$\Leftarrow$) Un argumento similar muestra la afimación recíproca.
2) Sea P un filtro maximal y supongamos que $x \vee y \in P$ con $x, y \notin P$. Consideremos los filtros

$$F_x =< P \cup \{x\} > \quad F_y =< P \cup \{y\} > .$$

Notemos que $P \subseteq F_x$ y además $P \subseteq F_y$. Dado que P es maximal, existe $p \in P$ tal que $p \wedge x = p \wedge y = 0$. Consideremos entonces

$$0 = (p \wedge x) \vee (p \wedge y),$$

es claro que $0 \in P$ lo que es imposible.
3) Por último, consideremos P un filtro irreducible, veamos que es primo. Para esto, supongamos que $x \vee y \in P$ y además $x, y \notin P$. Sean F_x y F_y los filtros considerados en (2), y afirmamos que $P = F_x \cap F_y$. En efecto, es claro que $P \subseteq F_x \cap F_y$. Por otro lado, sea $z \in F_x \cap F_y$ entonces $z = p \wedge x = p \wedge y$ para algún $p \in P$. Luego

$$\begin{aligned} z &= z \vee z \\ &= (p \wedge x) \vee (p \wedge y) \\ &= p \wedge (x \vee y) \end{aligned}$$

De donde se sigue que $z \in P$ y así P no es irreducible, lo que es una contradicción. □

Lema 3.4. *Sean L_1, L_2 retículos, y sea $h : L_1 \to L_2$ un homomorfismo de retículos :*

1 Si F es un filtro $F \subseteq L_2$ entonces $h^{-1}(F) \subseteq L_1$ es un filtro.

2 Si h es sobreyectiva y $F \subseteq L_1$ es filtro, entonces $h(F) \subseteq L_2$ es un filtro.

Demostración. 1) Consideremos F un filtro de L_2 y consideremos $x \in h^{-1}(F)$ con $x \leq y$. Dado que h mantiene el orden, se sigue que $h(x) \leq h(y)$ y desde que F es creciente, obtenemos $h(y) \in F$, de donde $y \in h^{-1}(F)$. Por otro lado, sean $x, y \in h^{-1}(F)$, entonces $h(x), h(y) \in F$. Dado que F es filtro, $h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y) \in F$ y así $x \wedge y \in h^{-1}(F)$ como queríamos mostrar.
2) Un argumento similar muestra dicha afirmación. □

Uno de los resultados más fuertes de la teoria de estructura de los retículos, es el teorema del filtro primo. Este nos da un criterio de separación, por medio de un filtro irreducible, que, en caso de ser L un retículo distributivo, será un filtro primo.

Lema 3.5. ***De Zorn*** *Sea X un conjunto no vacío, y sea $F \subseteq P(X)$. Supongamos que para toda cadena C, del conjunto ordenado $(F, \subseteq)$, se verifica que $\bigcup C \in F$, entonces F tiene un elemento maximal.*

Teorema 3.2. ***del filtro primo*** *Sean L un retículo, F un filtro e I un ideal, tal que $F \cap I = \emptyset$, entonces, existe un filtro P irreducible tal que $F \subseteq P$ y además $P \cap I = \emptyset$.*

Demostración. Consideremos la familia

$$\Gamma = \{H \in Fi(L) : F \subseteq H, H \cap I = \emptyset\}.$$

Es fácil ver que $F \in \Gamma$, de donde se sigue que Γ es no vacía.
Además, si $C \subseteq \Gamma$ es una cadena veamos que

$$\bigcup_{U \in C} U \in \Gamma.$$

Es inmediato verificar que $F \subseteq \bigcup_{U \in C} U$, restará ver que

$$(\bigcup_{U \in C} U) \cap I = \emptyset.$$

Pero también es inmediato puesto que

$$(\bigcup_{U \in C} U) \cap I = \bigcup_{U \in C} (U \cap I) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $\bigcup_{U \in C} U$ es cota superior para C, y tendrá entonces, por el Lema 3.5 un elemento maximal, digamos P, que será entonces, el filtro buscado.
Restará ver que es irreducible. Supongamos que

$$P = H_1 \cap H_2.$$

veamos que $P = H_1$ o bien, $P = H_2$. Supongamos por absurdo que $P \subseteq H_2$ y $P \subseteq H_1$, entonces se tiene, por la maximalidad de P,

$$H_1 \cap I \neq \emptyset \quad H_2 \cap I \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existen $h_1 \in H_1 \cap I$ y $h_2 \in H_2 \cap I$ por lo cual

$$h_1 \vee h_2 \in P \cap I = \emptyset.$$

lo que es imposible. □

Teorema 3.3. ***Representación de Retículos distributivos*** *Sea L un retículo distributivo acotado, entonces existe un conjunto ordenado $(X, \leq)$ y un sub-retículo $D \subseteq P(X)$ de manera tal que*

$$L \simeq D.$$

Demostración. Consideremos

$$X = X(L) = \{P \subseteq L : \text{ P es filtro primo de L}\}.$$

Y consideremos $P(X(L))$.
Definimos

$$\phi_+ : L \to P(X(L)).$$

$$a \to \phi_+(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}.$$

Es sencillo notar que la aplicación ϕ_+ verifica

- $\phi_+(0) = \emptyset$.
- $\phi_+(a \wedge b) = \phi_+(a) \cap \phi_+(b)$.
- $\phi_+(a \vee b) = \phi_+(a) \cup \phi_+(b)$.
- $\phi_+(1) = X(L)$.

De donde se deduce entonces que es homomorfismos de retículos distributivos.

Veamos ahora que ϕ_+ es una aplicación inyectiva, en efecto, supongamos que $a \nleq b$, y sea $P \in \phi_+(a)$, entonces, $b \notin P$, de donde se sigue que $P \notin \phi_+(b)$, entonces $\phi_+(a) \neq \phi_+(b)$, de donde se deduce lo afirmado.

Se sigue entonces que

$$L \simeq D = \phi_+[L].$$

□

3.3. Dualidad de Priestley

En el desarrollo de esta sección mostraremos que los retículos distributivos son dualmente equivalentes a los espacios de Priestley, ver [12].
Recordemos que, un espacio topológico $(X, \tau, \leq)$ es de Priestley si es un espacio topológico parcialmente ordenado, compacto, y totalmente disconexo en el orden.

Sea L un retículo distributivo, y consideremos $X(L)$ el conjunto de los filtros primos de dicho retículo. Es inmediato notar, a partir del Teorema 3.3 , que el conjunto $\phi_+(L) = \{\phi_+(a) : a \in L\}$, es una base para alguna topología sobre X(L). Sin embargo, si consideramos la aplicación

$$\phi_- : L \to P(X(L)).$$

$$a \to \phi_-(a) = \{P \in X(L) : a \notin P\}.$$

Es claro, a partir de la definición de sub-base de una topología, que el conjunto $\beta = \phi_+[L] \cup \phi_-[L]$ es una sub-base para una topología sobre X(L).

Teorema 3.4. *Sea L un retículo distributivo y sea $(X(L), \tau, \subseteq)$ el espacio topológico ordenado, generado por la sub-base β. Entonces $(X(L), \tau, \subseteq)$ es un espacio de Priestley.*

Demostración. Veamos primero que es un espacio compacto, en efecto, por el Lema 1.2, bastará con probarlo con elementos de la sub-base. Consideremos

$$X(L) \subseteq (\bigcup_{a\in A} \phi_+(a)) \cap (\bigcup_{b\in B} \phi_-(b)).$$

un cubrimiento por sub-básicos del espacio, donde $A \subseteq L$ y $B \subseteq L$. Consideremos F, el filtro generado por B, y el ideal I, generado por A, y notemos que, $F \cap I \neq \emptyset$.
Por absurdo, supongamos que $F \cap I = \emptyset$, por el Teorema 3.2, existe $Q \in X(L)$ tal que $F \subseteq Q$ y $I \cap Q = \emptyset$. Consideremos entonces, $b \in B$ se tiene que, $b \in B \subseteq F \subseteq Q$. Por lo cual, $Q \notin \phi_-(b)$.
Por otro lado, siendo $I \cap Q = \emptyset$ se tiene que $Q \notin \phi_+(a)$, por lo cual

$$(\bigcup_{a\in A} \phi_+(a)) \cap (\bigcup_{b\in B} \phi_-(b)) \subseteq X(L).$$

lo que es imposible.
Se sigue entonces que existe un elemento $c \in F \cap I$. Luego por definición, existen $a_1, \cdots, a_n \in A$, $b_1, \cdots, b_k \in B$, de manera tal que

$$b_1 \wedge \cdots \wedge b_k \leq c \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n.$$

por lo cual, si $P \in \bigcap_{i=1}^{k} \phi_+(b_i)$ entonces, $P \in \bigcup_{i=1}^{n} \phi_+(a_i)$, por lo cual

$$\bigcap_{i=1}^{k} \phi_+(b_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \phi_+(a_i).$$

de donde se tiene que

$$(\bigcap_{i=1}^{n} \phi_-(a_i)) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \phi_+(b_i) = \emptyset.$$

Luego, tomando complementos, se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \phi_+(a_i)) \cup \bigcup_{i=1}^{k} \phi_-(b_i) = X(L).$$

entonces, de todo cubrimiento por sub-básicos, se tiene un sub-cubrimiento finito, entonces $(X(L), \tau)$ es un espacio compacto.
En el caso de que $B = \emptyset$, notemos que

$$X(L) \subseteq \bigcup_{a\in A} \phi_+(a).$$

Consideremos entonces, $F =< 1 >_f = 1$ y por otro lado, $I =< A >_I$, es sencillo verificar que $F \cap I \neq \emptyset$, de donde se sigue que existe $z \in L$ tal que

$$1 \leq z \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n \Rightarrow 1 = a_1 \vee \cdots \vee a_n.$$

De donde afirmamos que

$$X(L) = \phi_+(1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \phi_+(a_i).$$

Un resultado análogo puede hacerse, considerando $A = \emptyset$. Restará notar entonces, que, si $P \nsubseteq Q$, existe un U clopen creciente, tal que $P \in U$ y $Q \notin U$.
Bastará considerar, para $a \in P - Q$, el sub-básico $\phi_+(a)$ ya que $P \in \phi_+(a)$ y además, $Q \notin \phi_+(a)$.
Es inmediato verificsr que $\phi_+(a)$ es un clopen creciente.
Luego, $(X(L), \tau, \subseteq)$ es un espacio de Priestley. $\square$

Lema 3.6. *Sea L un retículo distributivo y sea $(X(L), \tau, \subseteq)$ su espacio de Priestley asociado, entonces*

1 $CpUp(X) = \phi_+[L]$.

2 $CpDo(X) = \phi_-[L]$.

Demostración. Bastará con mostrar (1). Es fácil verificar que $\phi_+[L] \subseteq CpUp(X)$. Consideremos $U \in CpUp(X)$, y sea $P \in U$. Para cada $Q \in U^c$, se sigue que $P \not\subseteq Q$. Consideremos $a \in P - Q$, entonces $P \in \phi_+(a)$. Se sigue entonces que $Q \in \phi_-(a)$ y por lo cual

$$U^c \subseteq \bigcup_{a \in P-Q} \phi_-(a).$$

Puesto que U^c es cerrado, será compacto, y por lo cual, $U^c = \phi_-(a_1) \cup \cdots \cup \phi_-(a_n)$. Luego, $P \in \phi_+(a_1) \cap \cdots \cap \phi_+(a_n)$ de donde se sigue que $P \in \phi_+(x)$, donde $x = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$. Se sigue entonces que

$$U \subseteq \bigcup_{a \in L} \phi_+(a)$$

Puesto que es compacto, se sigue que $U = \phi_+(a_1) \cup \cdots \cup \phi_+(a_k)$. Por lo cual, $U = \phi_+(a)$ para algún $a \in L$. $\square$

Teorema 3.5. *Sean L y L' dos retículos distributivos y sea $h : L \to L'$ un homomorfismo de retículos distributivos, entonces la aplicación*

$$f_h : X(L') \to X(L).$$

$$P \to h^{-1}(P).$$

es una aplicación continua y creciente entre los espacios de Priestley asociados.

Demostración. A partir del Lema 3.4, es claro que la aplicación está bien definida. Veamos que es una aplicación continua, en efecto, sea $\phi_+(a)$ un sub básico para $(X(L), \tau)$, entonces

$$\begin{aligned} P \in f_h^{-1}(\phi_+(a)) &\Leftrightarrow f_h(P) \in \phi_+(a) \\ &\Leftrightarrow a \in f_h(P) \\ &\Leftrightarrow a \in h^{-1}(P) \\ &\Leftrightarrow h(a) \in P \\ &\Leftrightarrow P \in \phi'_+(h(a)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $f_h^{-1}(\phi_+(a)) = \phi'_+(h(a))$, y en consecuencia, es una aplicación continua. Es inmediato verficar que es una aplicación que preserva el orden. $\square$

Definición 3.10. *Sean **DLat** y **Priest** las categorías de retículos distributivos y espacios de Priestley, respectivamente, definimos el funtor*

$$\rho : \textbf{\textit{DLat}} \to \textbf{\textit{Priest}}.$$

$$L \to (X(L), \tau, \subseteq).$$

Además, siendo $h : L \to L'$ un homomorfismo de retículos distributivos, se obtiene que $\rho(h) = f_h = h^{-1}$ es un morfismo entre los espacios de Priestley asociados a L y L' respectivamente.

Realizaremos ahora, el proceso inverso, a partir de un espacio de Priestley, nos crearemos un retículo distributivo.

Recordemos que, dado un espacio de Priestley, indicaremos :

- $CpUp(X)$ al conjunto de los clopen crecientes.

- $OpUp$ al conjunto de abiertos crecientes.
- $ClUp$ al conjunto de cerrados crecientes.
- $CpDo$ al conjunto de clopen decrecientes.
- $OpDo$ al conjunto de los abiertos decrecientes.
- $ClDo$ al conjunto de los cerrados decrecientes.

Teorema 3.6. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, entonces $< CpUp(X), \cap, \cup, \emptyset, X >$ es un retículo distributivo.*

Demostración. Es inmediato. Más aún a partir de las operaciones de conjuntos es un retículo distributivo. □

Teorema 3.7. *Sean $(X, \tau, \leq)$ y $(X', \tau', \leq')$ dos espacios de Priestley, y sea $f : X \to X'$ una aplicación continua que preserva el orden. Entonces la aplicación*

$$h_f : ClUp(X') \to ClUp(X).$$

$$U \to f^{-1}(U).$$

Es un homomorfismo de retículos distributivos.

Demostración. Es claro, a partir de la continuidad y de la preservación del orden, que es una aplicacíón bien definida. Más aún de las propiedades de la pre imagen de una función, es inmediato que es un homomorfismo de retículos distributivos. □

Definición 3.11. *Sean **Pries** y **DLat** las categorías de espacios de Priestley y de retículos distributivos respectivamente, definimos el funtor*

$$\delta : \textbf{\textit{Priest}} \to \textbf{\textit{DLat}}.$$

$$(X, \tau, \leq) \to < CpUp(X), \cap, \cup, \emptyset, X > .$$

Además, para un morfismo de espacios de Priestley $f : X \to X'$, la aplicación $\delta(f) = h_f = f^{-1}$ es un morfismo en la categoría de los retículos distributivos.

Podemos establecer, a partir de los funtores definidos en 3.4 y 3.6 una correspondencia biyectiva entre las categorías **Priest** y **DLat**. Más aún, estas categorías son dualmente equivalentes.

Teorema 3.8. *Las categorías **DLat** y **Pries**, son dualmente equivalentes.*

Demostración. Sea L un retículo distributivo, probaremos que $\delta(\rho(L)) \simeq L$. Recordemos que, $\rho(L) = (X(L), \tau, \subseteq)$ donde la topología es la generada por la sub-base

$$\beta = \{\phi_+(a) : a \in L\} \cup \{\phi_-(a) : a \in L\}.$$

Luego, si consideramos $\delta(\rho(L)) = (CpUp(X(L)), \cap, \cup, \emptyset, X(L))$. Consideremos la aplicación

$$\phi_+ : L \to \delta(\rho(L)).$$

$$a \to \phi_+(a).$$

Ya sabemos, por Teorema 3.3, que es un isomorfismo de retículos distributivos. Además, por el Lema 3.6 $CpUp((X(L), \tau, \subseteq)) = \phi_+[L]$, obteniendo así que $L \simeq \delta(\rho(L))$.

Por otro lado, consideremos $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, veamos que $X \simeq \rho(\delta(X))$. Consideremos la aplicación

$$\xi : X \to \rho(\delta(X)).$$

$$x \to \xi(x) = \{U \in \delta(X) : x \in U\}.$$

Notemos que, es una aplicación que está bien definida ya que $\xi(x)$ es un filtro primo de $\delta(X)$, y además, es continua, ya que para $U \in \delta(X)$ se tiene que

$$\begin{aligned} x \in \xi^{-1}(\phi_+(U)) \quad &\Leftrightarrow \quad \xi(x) \in \phi_+(U) \\ &\Leftrightarrow \quad U \in \xi(x) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in U. \end{aligned}$$

Entonces $U = \xi^{-1}(\phi_+(U))$.
Notemos además que es inyectiva, puesto que si $x \neq y$, podemos asumir que $x \not\leq y$, al ser X un espacio de Priestley, existe $U \in CpUp(X)$ de manera tal que $x \in U$ e $y \notin U$, por lo cual, $\xi(x) \neq \xi(y)$.
Veamos ahora, que es sobreyectiva. Sea $P \in \rho(\delta(X))$ veamos que existe un $x \in X$ tal que $P = \xi(x)$. Consideremos entonces $Q = \{V \subseteq X : V^c \notin P\}$. Es claro que $P \cup Q$ es una familia de cerrados en X, y además posee la PIF. En efecto, supongamos que no posee la PIF, entonces, existen $U_1, \cdots, U_n \in P$ y $V_1, \cdots, V_k \in Q$, de manera tal que $U_1 \cap, \cdots, \cap U_n \cap V_1, \cdots \cap, V_k = \emptyset$. Se tiene entonces que $U_1 \cap, \cdots, \cap U_n \subseteq V_1^c, \cup, \cdots, \cup V_k^c$, por lo tanto, al ser P filtro se tiene que $V_1^c, \cup, \cdots, \cup V_k^c \in P$, puesto que P es primo, se sigue que algún $V_j^c \in P$ lo que es imposible. Luego, al ser X un espacio de Priestley, será compacto y T_2, entonces existe $\{x\} \in \bigcap\{U : U \in P \cup Q\}$ y se tiene que $P = \xi(x)$. En consecuencia $X \simeq \rho(\delta(X))$ y serán ambas categorías, dualmente equivalentes. □

En los siguientes diagramas observamos las acciones de los funtores ρ y δ, respectivamente.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & L' \arrow[d, "\rho"] \\ (X(L), \tau, \subseteq) & (X(L'), \tau', \subseteq) \arrow[l, "f_h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X, \tau, \leq) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & (X', \tau', \leq') \arrow[d, "\delta"] \\ CpUp(X) & CpUp(X') \arrow[l, "h_f"'] \end{tikzcd}$$

Notemos que, a diferencia de los isomorfismos entre categorías establecidos en el capítulo 2, aquí hemos establecido una equivalencia dual entre dos categorías, es decir, al componer ambos funtores, y aplicarlo a algún objeto no se obtiene el mismo objeto, sino que, un objeto isomorfo al original. Esta idea la reflejamos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend left, "\phi"] & (X(L), \tau, \leq) \arrow[r, "\delta"] & CpUp(X(L)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (X, \tau, \leq) \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend right, "\xi"'] & CpUp(X) \arrow[r, "\delta"] & (X(CpUp(X), \tau', \subseteq) \end{tikzcd}$$

3.4. Dualidad Espectral

Con la misma intensión que en la sección anterior, mostraremos que, sin la necesidad de hablar de espacios bi-topológicos, la categoría de los retículos distributivos es dualmente equivalente a la categoría de los espacios espectrales.
Recordemos que un espacio topológico espectral es un espacio topológico que es T_0, compacto, coherente y sober.
Sea L un retículo distributivo, consideremos la aplicación

$$\phi_+ : L \to P(X(L)).$$

$$a \to \phi_+(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}.$$

Como hemos notado anteriormente, el conjunto imagen de dicha aplicación, $\beta_1 = \{\phi_+(a) : a \in L\}$, es una base para una topología τ, sobre X(L).

Teorema 3.9. *Sea L un retículo distributivo, entonces el espacio topológico* $(X(L), \tau)$ *es un espacio espectral, donde* τ *es la topología generada por la base* β_1*.*

Demostración. Consideremos $(X(L), \tau', \subseteq)$ el espacio de Priestley asociado a L. Puesto que $\tau \subseteq \tau'$ y $(X(L), \tau')$ es compacto, se deduce que $(X(L), \tau)$ es compacto.
Sean $P, Q \in X(L)$ de manera tal que $P \neq Q$. Supongamos que $P \nsubseteq Q$, entonces, existe un elemento $a \in P - Q$, por lo cual, $P \in \phi_+(a)$, y $Q \notin \phi_+(a)$, por lo cual, es un espacio T_0.
Veamos ahora que es un espacio coherente. Bastará probar que $\epsilon(X) = \beta_1$. Sea $U \in \epsilon(X)$ entonces, U es abierto y compacto, por lo cual, U es unión de elementos de β_1. Puesto que U es compacto, existe un sub cubrimiento finito por elementos de β_1. Puesto que β_1 es cerrado por uniones finitas, se sigue que $U \in \beta_1$, y así, $\epsilon(X) \subseteq \beta_1$.
Sea ahora, $U \in \beta_1$, entonces $U = \phi_+(a)$ para algún $a \in L$. Es claro que $\phi_+(a)$ es abierto, veamos ahora que es compacto. Sea $\phi_+(a) \subseteq \bigcup_{b \in B} \phi_+(b)$.
Consideremos $I =< \{b : b \in B\} >$ el ideal generado por los elementos de B, y sea $F = [a)$ al filtro generado por a. Es claro que $F \cap I \neq \emptyset$, por lo tanto, existe $x \in F \cap I$. Por definición, existen $b_1, \cdots, b_n \in I$, de manera tal que $a \leq x \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$, por lo cual, $a \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$ y por lo tanto, $\phi_+(a) \subseteq \phi_+(b_1) \cup \cdots \cup \phi_+(b_n)$, y será entonces, compacto. En consecuencia, (X, τ) es un espacio coherente.
Por último, veamos que es sóber. Sea $Y \subseteq X(L)$ un cerrado irreducible, y consideremos el filtro $P = \{a \in L : Y \subseteq \phi_+(a)\}$. Notemos además que es primo, en efecto, si $a \vee b \in P$, entonces $Y \subseteq \phi_+(a \vee b) = \phi_+(a) \cup \phi_+(b)$. Luego, $Y = (Y \cap \phi_+(a)) \cup (Y \cap \phi_+(b))$, puesto que es un cerrado irreducible, o bién $Y = \phi_+(a) \cap Y$, lo que implica $Y \subseteq \phi_+(a)$, o bien $Y = \phi_+(b) \cap Y$ lo que implica $Y \subseteq \phi_+(b)$, de donde se tiene que P es filtro primo. Más aún, $P \in Y$, de lo contrario, $P \in Y^c$. Puesto que Y^c es abierto, existe $a \in L$ tal que $P \in \phi_+(a) \subseteq Y^c$, por lo cual, $Y \subseteq \phi_+(a) \subseteq Y^c$, lo que es imposible. Se sigue entonces, $P \in Y$ y por lo tanto $Cl(P) \subseteq Y$.
Por otro lado, veamos que $Y \subseteq Cl(P)$ ó lo que es equivalente, $Cl(P)^c \subseteq Y^c$. Es importante notar que, por definición de P, se tiene que

$$Y \subseteq \bigcap_{a \in P} \phi_+(a).$$

Consideremos entonces $Z \in Cl(P)^c$, puesto que $(X(L), \tau)$ es T_0, se tiene que $Cl(P) = P$, de donde se sigue que $Z \in P^c$. Sea $a \in P$, es claro a partir de lo anterior, que $a \notin Z$, de donde se sigue que $Z \notin \bigcap_{a \in P} \phi_+(a)$, de donde se sigue que $Z \in Y^c$, por lo cual, $Cl(P)^c \subseteq Y^c$ como queríamos mostrar. □

Teorema 3.10. *Sean L y L' dos retículos distributivos, $h : L \to L'$ un homomorfismo de retículos. Sean $(X(L), \tau)$ y $(X(L'), \tau')$ sus espacios espectrales asociados, entonces la aplicación*

$$f_h : X(L') \to X(L).$$

$$P \to h^{-1}(P).$$

Es una función espectral.

Demostración. Es inmediato, de la propia definición, que es una función bien definida. Veamos que es continua, en efecto consideremos $\phi_+(a) \in \beta_1$, notemos que

$$\begin{aligned} P \in f_h^{-1}(\phi_+(a)) &\Leftrightarrow f_h(P) \in \phi_+(a) \\ &\Leftrightarrow h^{-1}(P) \in \phi_+(a) \\ &\Leftrightarrow a \in h^{-1}(P) \\ &\Leftrightarrow h(a) \in P \\ &\Leftrightarrow P \in \phi'_+(h(a)). \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que $f_h^{-1}(\phi_+(a)) = \phi'_+(h(a)) \in \beta'_1$, de donde se deduce además que es espectral. □

Definición 3.12. *Sean **DLat** y **Spec** las categorías de los retículos distributivos y espacios espectrales respectivamente. Definimos entonces el funtor*

$$\alpha : \boldsymbol{DLat} \to \boldsymbol{Spec}.$$

$$L \to (X(L), \tau).$$

En donde τ es la topología generada por la base $\beta_1 = \{\phi_+(a) : a \in L\}$. Además, para un morfismo $h : L \to L'$ de retículos distributivos, la aplicacion $\alpha(h) = f_h = h^{-1}$ es un morfismo entre los espacios espectrales asociados a L y L'.

Veamos ahora el proceso inverso, a partir de un espacio espectral, crearemos un retículo distributivo. Recordemos que, para un espacio espectral $(X, \tau,)$, consideramos a la base del espacio dada por el conjunto $\epsilon(X) = \{U \in \tau : U \text{ es compacto}\}$. Notemos que dicha base es cerrada para uniones e intersecciones finitas, por lo cual, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.11. *Sea (X, τ) un espacio espectral, entonces $< \epsilon(X), \cup, \cap, \emptyset, X >$ es un retículo distributivo.*

Demostración. Es inmediato. □

Por otro lado, recordemos que, dados dos espacios espectrales (X, τ) y (X, τ') diremos que una función $f : X \to X'$ es espectral, si para todo $U \in \epsilon(X')$, se tiene $f^{-1}(U) \in \epsilon(X)$.

Teorema 3.12. *Sean (X, τ) y (X', τ') dos espacios espectrales, y sea $f : X \to X'$ una función espectral, entonces la aplicación*

$$h_f : \epsilon(X') \to \epsilon(X).$$

$$U \to f^{-1}(U).$$

Es un homomorfismo de retículos distributivos.

Demostración. Es inmediata la buena definición de la aplicación, más aún, por propiedades de la pre imagen de una función, es homomorfismo de retículos distributivos. □

Definición 3.13. *Sean **Spec** y **DLat** las categorías de espacios espectrales y retículos distributivos respectivamente, definimos el funtor*

$$\theta : \textbf{\textit{Spec}} \to \textbf{\textit{DLat}}.$$

$$X \to < \epsilon(X), \cap, \cup, \emptyset, X > .$$

Además, para $f : X \to X'$ un morfismo entre espacios espectrales, la aplicacion $\theta(f) = h_f = f^{-1}$ es un morfismo entre los retículos asociados a X y X' respectivamente.

En función de los resulatdos obtenidos en 3.9 y 3.11, puede establecerse una correspondecia biyectiva entre ambas categorías, más aún mostraremos que son dualmente equivalentes.

Teorema 3.13. *Las categorías **DLat** y **Spec** son dualmente equivalentes.*

Demostración. Sea L un retículo distributivo, mostraremos que $L \simeq \theta(\alpha(L))$. Notemos que $\theta(\alpha(L)) =< \epsilon(X(L)), \cap, \cup, \emptyset, X(L) >$. Consideremos la aplicación

$$\phi_+ : L \to \theta(\alpha(L)).$$

$$a \to \phi_+(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}.$$

Puesto que $\epsilon(X(L)) = \beta_1 = \{\phi_+(a) : a \in L\}$ se deduce entonces que ϕ_+ es un isomorfismo de retículos distributivos.
Sea ahora (X, τ) un espacio espectral, mostraremos que $X \simeq \alpha(\theta(X))$. Notemos que $\alpha(\theta(X)) = (X(\epsilon(X)), \tau')$ donde τ' es la topología generada por la base $\beta'_1 = \{\phi_+(U) : U \in \epsilon(X)\}$. Consideremos la aplicación

$$\xi : X \to \alpha(\theta(X)).$$

$$x \to \xi(x) = \{U \in \epsilon(X) : x \in U\}.$$

Como hemos mostrado anteriormente, en el Teorema 3.8 es un homeomorfismo de espacios espectrales. En consecuencia, ambas categorías son dualmente equivalentes. $\square$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha"'] & L' \arrow[d, "\alpha"] \\ (X(L),\tau) & (X(L'),\tau') \arrow[l, "f_h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta"'] & (X',\tau') \arrow[d, "\theta"] \\ \epsilon(X) & \epsilon(X') \arrow[l, "h_f"'] \end{tikzcd}$$

De igual modo que hemos observado en la sección anterior, luego de componer los funtores establecidos, obtenemos objetos isomorfos (respectivamente, homeomorfos) al objeto de partida. Tal situación la reflejamos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\phi"] & (X(L),\tau) \arrow[r, "\theta"] & \epsilon(X(L)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[r, "\theta"] \arrow[rr, bend left, "\xi"] & \epsilon(X) \arrow[r, "\alpha"] & (X(\epsilon(X)),\tau') \end{tikzcd}$$

3.5. Dualidad bi-topológica para retículos distributivos

Sea L un retículo distributivo y consideremos el conjunto $X(L) = \{P \subseteq L : \text{P es filtro primo}\}$. Además consideremos las aplicaciones

$$\phi_+ : L \to P(X(L)).$$

$$a \to \phi_+(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}.$$

Y, por otro lado,

$$\phi_- : L \to P(X(L)).$$
$$a \to \phi_-(a) = \{P \in X(L) : a \notin P\}.$$

Es fácil ver que $\phi_+(a)^c = \phi_-(a)$ y además se verifican las siguientes propiedades

- $\phi_+(0) = \emptyset$. $\phi_-(0) = X(L)$.
- $\phi_+(1) = X(L)$ $\phi_-(1) = \emptyset$.
- $\phi_+(a \wedge b) = \phi_+(a) \cap \phi_+(b)$. $\phi_-(a \wedge b) = \phi_-(a) \cup \phi_-(b)$.
- $\phi_+(a \vee b) = \phi_+(a) \cup \phi_+(b)$. $\phi_-(a \vee b) = \phi_-(a) \cap \phi_-(b)$.

Sea L un retículo distributivo, consideremos las familias de sub-conjuntos de X(L)

- $\beta_1 = \phi_+(L)$.
- $\beta_2 = \phi_-(L)$.

Es inmediato verificar que tanto β_1 como β_2 forman una base para alguna topología sobre $X(L)$, consideremos entonces :

- $(X(L), \tau_1)$ a la topología generada por β_1.
- $(X(L), \tau_2)$ a la topología generada por β_2.

Probaremos que, en efecto, el espacio bi-topológico (X, τ_1, τ_2) es un espacio de Stone por pares.

Teorema 3.14. *Sea L un retículo distributivo, y sea $(X(L), \tau_1, \tau_2)$ el espacio bi-topológico donde τ_1 es la topología generada por la base $\beta_1 = \{\phi_+(a) : a \in L\}$ y τ_2 es la topología generada por la base $\beta_2 = \{\phi_-(a) : a \in L\}$, entonces $(X(L), \tau_1, \tau_2)$ es un espacio de Stone por pares.*

Demostración. Veamos que es compacto por pares, en efecto consideremos un cubrimiento por abiertos de $\tau_1 \cup \tau_2$, es decir,

$$X(L) \subseteq \bigcup_{i\in I} \phi_+(a_i) \cup \bigcup_{j\in J} \phi_-(b_j).$$

y consideremos el filtro e ideal

$$F =< \{b_j : j \in J\} >_f \qquad I =< \{a_i : i \in I\} >_i .$$

Notemos que, $F \cap I \neq \emptyset$ puesto que de lo contrario, por el teorema del filtro primo, existirá un filtro primo Q, de manera tal que $F \subseteq Q$ y $Q \cap I = \emptyset$, es decir, que $Q \notin \bigcup_{i\in I} \phi_+(a_i) \cup \bigcup_{j\in J} \phi_-(b_j)$ entonces, no sería un cubrimiento, lo que es una contradicción.
Luego, existe un $x \in F \cap I$, por definición, existen $b_1, \cdots, b_n$ y $a_1, \cdots, a_k$ tales que

$$b_1 \wedge \cdots \wedge b_n \leq x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_k.$$

Es decir, que si $P \in \bigcap_{i=1}^n \phi_+(b_i) \Rightarrow P \in \bigcup_{j=1}^k \phi_+(a_j)$, por lo cual, se deduce que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \phi_+(b_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \phi_+(a_j).$$

De donde se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \phi_+(b_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{k} \phi_+(a_j))^c = \emptyset.$$

Tomando complementos, se tiene que

$$X(L) = \bigcup_{i=1}^{n} \phi_-(b_i) \cup \bigcup_{j=i}^{k} \phi_+(a_j).$$

Es decir, X(L) es compacto por pares.

Probemos, que es un espacio Hausdorff por pares. Sean $P, Q \in X(L)$ de manera tal que $P \neq Q$. Podemos suponer, que $P \subseteq Q$. Sea $a \in L$ tal que $a \in Q - P$, se sigue que, $Q \in \phi_+(a)$ y $P \in \phi_-(a)$, y además, $\phi_+(a) \cap \phi_-(a) = \emptyset$, entonces, $(X(L), \tau_1, \tau_2)$ es Hausdorff por pares.

Por último, veamos que es cero dimensional por pares. Consideremos $U \in \beta_1$, entonces, por definición, se tiene que $U = \phi_+(a)$ y por lo cual, $U \in \tau_1 \cap \delta_2$. Recíprocamente, consideremos $U \in \tau_1 \cap \delta_2$ puesto que (X, τ_1, τ_2) es compacto por pares, se sigue que $\delta_2 \subseteq \sigma_1$ entonces, al ser $U \in \tau_1$, U es unión de elmentos de la base, y al ser compacto, se deduce que $U = \phi_+(a_1) \cup \cdots \cup \phi_+(a_n)$, es decir, $U = \phi_+(\bigvee_{i=1}^{n} a_i)$, por lo cual se tiene que $\beta_1 = \tau_1 \cap \delta_2$.
De igual manera, se prueba que $\beta_2 = \tau_2 \cap \delta_1$ y así, $X(L), \tau_1, \tau_2)$ es cero dimensional por pares, y en consecuencia, es de Stone por pares. $\square$

Teorema 3.15. *Sean L , L' retículos distributivos, y sean $(X(L), \tau_1, \tau_2)$ y $(X(L'), \tau_1', \tau_2')$ sus espacios de Stone por pares asociados. Sea $h : L \to L'$ un homomorfismo de retículos, entonces la aplicación*

$$f_h : X(L') \to X(L).$$
$$P \to f_h(P) = f^{-1}(P).$$

Es una función bi-continua.

Demostración. Mostraremos que, es continua para $(X(L'), \tau_1')$ y $(X(L), \tau_1)$, de igual modo, se obtendrá la continuidad para $(X(L'), \tau_2')$ y $(X(L), \tau_2)$.
Bastará probar que $f_h^{-1}(\phi_+(a)) = \phi_+'(h(a))$. Sea $P \in f_h^{-1}(\phi_+(a))$ entonces

$$\begin{aligned} f_h(P) \in \phi_+(a) \quad &\Leftrightarrow \quad a \in f_h(P) \\ &\Leftrightarrow \quad a \in h^{-1}(P) \\ &\Leftrightarrow \quad h(a) \in P \\ &\Leftrightarrow \quad P \in \phi_+'(h(a)). \end{aligned}$$

Así, es continua para $(X(L), \tau_1)$ y $(X(L'), \tau_1')$. Se sigue entonces, que f_h es bi-continua. $\square$

Definición 3.14. *Sean **DLat** y **PStone** las categorías de retículos distributivos, y espacios de Stone por pares respectivamente, definimos el funtor*

$$(-)_* : \textbf{\textit{DLat}} \to \textbf{\textit{PStone}}.$$

$$L \to (X(L), \tau_1, \tau_2).$$

Además, para $h : L \to L'$ un morfismo de retículos distributivos, la aplicación $h_* = f_h = h^{-1}$ es un morfismo entre los espacios de Stone por pares asociados a L y L' respectivamente.

Veamos ahora, el proceso inverso, es decir, partiremos de un espacio (X, τ_1, τ_2) de Stone por pares, y construiremos un retículo distributivo L.

Teorema 3.16. *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio de Stone por pares, entonces $< \beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X >$ es un retículo distributivo.*

Demostración. Es inmediato notar, que β_1, al ser base para un espacio topológico, es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas, por lo cual, es cerrado para las operaciones propuestas, además, por propiedad del álgebra de conjuntos, es inmediata también la distributividad, por lo cual, se tiene que $< \beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X >$ es un retículo distributivo. $\square$

Teorema 3.17. *Sean (X, τ_1, τ_2) y (X', τ_1', τ_2') dos espacios de Stone por pares, y sea $f : X \to X'$ una función bi-continua, entonces la aplicación*

$$h_f : \beta_1' \to \beta_1.$$

$$V \to h_f(V) = f^{-1}(V).$$

es un homomorfismo de retículos distributivos.

Demostración. Es claro, a partir de la continuidad de f, que la aplicación está bien definida, además, por las propiedades de la pre-imagen, se tiene que

$$h_f(U \cap V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

y, además

$$h_f(U \cup V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

De donde se sigue entonces, que es un homomorfismo de retículos distributivos □

Definición 3.15. *Sean **DLat** y **PStone** las categorías de retículos distributivos, y espacios de Stone por pares respectivamente, definimos el funtor*

$$(-)^* : \textbf{\textit{PStone}} \to \textbf{\textit{DLat}}.$$

$$(X, \tau_1, \tau_2) \to < \beta_1, \cup, \cap, \emptyset, X > .$$

Además, para $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (X', \tau_1', \tau_2')$ un morfismo de espacios de Stone por pares, la aplicación $f^* = h_f = f^{-1}$ es un morfismo entre los retículos distributivos asociados a X y X' respectivamente.

Conforme a los teoremas 3.14,3.16, 3.15 y 3.17, hemos establecido una correspondencia 1 a 1 entre ambas categorías. Mostraremos a continuación un resultado mas fuerte aún, estas categorías son dualmente equivalentes.

Teorema 3.18. *Las categorías **DLat** y **PStone** de retículos distributivos, y espacios de Stone por pares respectivamente , son dualmente equivalentes.*

Demostración. Mostraremos que, a partir de un retículo distributivo L, se tiene que

$$(L_*)^* \simeq L.$$

Y, además, si, (X, τ_1, τ_2) es un espacio de Stone por pares, entonces

$$(X^*)_* \simeq X.$$

Es decir, son homeomorfos.
Consideremos L un retículo distributivo, entonces, $L_* = (X(L), \tau_1, \tau_2)$ donde, la topología $(X(L), \tau_1)$ es generada por la base $\beta_1 = \{\phi_+(a) : a \in L\}$ y la topología τ_2 es la generada por la base $\beta_2 = \{\phi_-(a) : a \in L\}$. Luego, consideremos $(L_*)^*$, obtenemos entonces el retículo distributivo dado por $(L_*)^* =< \beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X(L) >$.
Definimos entonces, la aplicación

$$\phi_+ : L \to (L_*)^*.$$

$$a \to \phi_+(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}.$$

Como ya hemos probado antes, en el Teorema 3.3, es un isomorfismo de retículos distributivos, en consecuencia, obtenemos $(L_*)^* \simeq L$.

Consideremos ahora, (X, τ_1, τ_2) un espacio de Stone por pares, recordemos que $X^* =< \beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X >$ y además el espacio de Stone por pares asociado a X^*, es dado por

$$(X^*)_* = (X(\beta_1), \tau_1', \tau_2').$$

Donde la topología τ_1' es la generada por la base $\beta_1' = \{\phi'_+(U) : U \in \beta_1\}$ y de igual modo, definimos la topología τ_2' dada por la base $\beta_2' = \{\phi'_-(U) : U \in \beta_1\}$.
Definimos entonces, la aplicación

$$\xi : X \to (X^*)_*.$$
$$x \to \xi(x) = \{U \in \beta_1 : x \in U\}.$$

Probaremos que, en efecto, es un homeomorfismo entre espacios de Stone por pares. Para $U \in \beta_1$, consideremos $\phi_+(U) \in \beta_1'$ veamos que $\xi^{-1}(\phi_+(U)) \in \beta_1$ y así, sera continua para (X, τ_1) y $((X^*)_*, \tau_1')$.

$$\begin{aligned} x \in \xi^{-1}(\phi_+(U)) &\Leftrightarrow \xi(x) \in \phi_+(U) \\ &\Leftrightarrow U \in \xi(x) \\ &\Leftrightarrow x \in U. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\xi^{-1}(\phi_+(U)) = U \in \beta_1$ y así, es continua para τ_1 y τ_1'. De manera análoga, se prueba la continuidad para τ_2 y τ_2'.

Consideremos $x, y \in X$ de manera tal que $x \neq y$, puesto que (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares, existen $U \in \beta_1$ $V \in \beta_2$ de manera tal que $x \in U$ $y \in V$ y además $U \cap V = \emptyset$, de donde se sigue que $\xi(x) \neq \xi(y)$ y por tanto, es inyectiva.
Sea $P \in X(\beta_1)$ y consideremos $Q = \{V \in \beta_2 : V^c \notin P\}$ es fácil ver que Q es un filtro primo para β_2, y además, $P \cup Q$ es una familia de cerrados para (X, τ_1, τ_2). Notemos que $P \cup Q$ posee la PIF, en efecto, supongamos por absurdo que existe una sub-familia finita $\{U_1 \cdots U_n\} \cup \{V_1 \cdots V_k\}$ de manera tal que

$$U_1 \cap \cdots \cap V_k = \emptyset.$$

Entonces, se sigue que

$$U_1 \cap \cdots \cap U_n \subseteq V_1^c \cup \cdots \cup V_k^c.$$

Pero entonces, $V_1^c \cup \cdots \cup V_k^c \in P$. Dado que P es filtro primo, existe indice i, con $V_i^c \in P$ lo que es imposible, por definición. Puesto que X es compacto por pares y Hausdorff por pares, existe entoces $x \in \bigcap_{U \in P \cup Q} U$ y por lo tanto, $P = \xi(x)$, así, se sique que es sobreyectiva y será un homeomorfismo de espacios de Stone por pares, y en consecuencia $X \simeq (X^*)_*$. $\square$

De la misma manera que hemos hecho en las secciones anteriores, representamos las acciones de los funtores y la equivalencia dual en los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "(-)_*"'] & L' \arrow[d, "(-)_*"] \\ (X(L), \tau_1, \tau_2) & (X(L'), \tau_1', \tau_2') \arrow[l, "f_h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X, \tau_1, \tau_2) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(-)^*"'] & (X', \tau_1', \tau_2') \arrow[d, "(-)^*"] \\ \beta_1 & \beta_1' \arrow[l, "h_f"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} < L, \wedge, \vee > \arrow[r, "(-)_*"] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] & (X(L), \tau_1, \tau_2) \arrow[r, "(-)^*"] & \beta_1(X(L)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X, \tau_1, \tau_2) \arrow[r, "(-)^*"] \arrow[rr, bend right, "\xi"'] & \beta_1 \arrow[r, "(-)_*"] & (X(\beta_1), \tau_1', \tau_2') \end{tikzcd}$$

3.6. Consideraciones finales

En vista de las secciones (3.3) y (3.4), se pueden obtener las dualidades para retículos distributivos, en términos de espacios de Priestley, asi como también para los espacios espectrales, independientemente de los resultados vistos en la sección (3.5). Pero también, pueden obtenerse la dualidad de Pristeley y la dualidad espectral en función de los espacios de Stone por pares, bastará entonces con observar el diagrama, y componer los funtores correspondientes.

Ejemplo 3.1. *Consideremos L un retículo distributivo y sea $L_* = (X(L), \tau_1, \tau_2)$ el espacio de Stone por pares asociado a L. Consideremos ahora $F(L_*)$ el espacio espectral asociado a L_*, entonces $\beta_1 = \{\phi_+(a) : a \in L\}$ es la base que genera a ese espacio. Notemos que, en efecto, se obtiene que*

$$\alpha(L) = F(L_*).$$

Por otro lado, sea (X, τ) un espacio espectral, consideremos $G(X) = (X, \tau_1, \tau_2)$ el espacio de Stone por pares asociado a (X, τ), donde τ_1 es la topología generada por la base $\epsilon(X)$ y τ_2 es la topología generada por la base $\Delta(X)$. Consideremos ahora $G(X)^*$ el retículo asociado a $G(X)$. Notemos que $G(X)^*$ es $\epsilon(X)$. Por lo tanto, se obtiene

$$\theta((X, \tau)) = G(X, \tau)^*.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Priest} \arrow[r, shift left, "\Psi"] \arrow[dr, shift left, "\rho"] & \mathbf{PStone} \arrow[l, shift left, "\Phi"] \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "(-)^*"'] & \mathbf{Spec} \arrow[l, shift left, "G"] \arrow[dl, shift left, "\theta"] \\
 & \mathbf{DLat} \arrow[ul, shift left, "\delta"] \arrow[u, shift right, "(-)_*"'] \arrow[ur, shift left, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

Capítulo 4

Dualidad de conceptos Algebraicos

En el desarrollo de este capítulo, haremos uso de los isomorfismos establecidos entre **PStone**, **Spec** y **Pries**, además de la dualidades establecidas entre **DLat** y **PStone**, para obtener la descripción dual de algunos conceptos algebraicos importantes en el estudio de la teoría de los retículos distributivos, tales como filtros, filtros primos, filtros maximales, ideales, ideales primos, ideales maximales, y sub-retículos.
La descripción dual de éstos conceptos, utilizando la dualidad de Priestley es conocida, y algunos de éstos conceptos han sido descriptos también para espacios espectrales. Desarrollaremos en detalle la dualidad de estos objetos algebraicos para los espacios de Priestley, espacios de Stone por pares y espectral asociados a un retículo distributivo L.

4.1. Filtros e Ideales

Comenzaremos por la descripción de filtros, filtros primos y filtros maximales, así como también la descripción de ideales, ideales primos e ideales maximales de retículos distributivos acotados, por medio de los espacios de Priestley.

Sea L un retículo distributivo, recordemos que $(X, \tau, \leq)$ su espacio de Priestley asociado, es dado por $(X(L), \tau, \subseteq)$ donde $X(L)$ es el conjunto de los filtros primos, parcialmente ordenado por la inclusión, y la topología es la generada por la sub-base

$$\{\phi_+(a) : a \in L\} \cup \{\phi_-(a) : a \in L\}.$$

Teorema 4.1. *Sea L un retículo distributivo y sea $(X, \tau, \leq)$ su espacio de Priestley asociado, entonces*

$$(Fi(L), \subseteq) \simeq (ClUp(X(L)), \subseteq).$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$C : Fi(L) \to ClUp(X).$$

$$F \to \bigcap\{\phi_+(a) : a \in F\}.$$

En vista del Lema 2.1 y del hecho de que $\phi_+(a)$ es un conjunto creciente para la inclusión, es inmediato notar que dicha aplicación está bien definida, e indicaremos $C_F = C(F)$. Supongamos que $F_1 \subseteq F_2$, y sea $P \in C_{F_2}$, entonces

$$\begin{aligned} P \in C_{F_2} \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall a \in F_2)(P \in \phi_+(a)) \\ &\Rightarrow \quad (\forall a \in F_1)(P \in \phi_+(a)) \\ &\Leftrightarrow \quad P \in C_{F_1}. \end{aligned}$$

de donde obtenemos $C_{F_2} \subseteq C_{F_1}$, por lo cual, la aplicación F invierte el orden.

Por otro lado, consideremos

$$F : ClUp(X) \to Fi(L).$$

$$C \to \{a \in L : C \subseteq \phi_+(a)\}.$$

Veamos que, está bien definida. Sea $a \in F_C$ y sea $b \in L$ tal que $a \leq b$, veamos que $b \in F_C$. Puesto que $a \leq b$, se tiene que $a = a \wedge b$ y por lo cual, $\phi_+(a) = \phi_+(a \wedge b) = \phi_+(a) \cap \phi_+(b)$ de donde, se deduce que $\phi_+(a) \subseteq \phi_+(b)$. Puesto que $C \subseteq \phi_+(a) \subseteq \phi_+(b)$ se obtiene que $C \subseteq \phi_+(b)$, de donde $b \in F_C$ y así, F_C es creciente.
Por otro lado, si $a, b \in F_C$, es inmediato que $a \wedge b \in F_C$, luego, F, es una aplicación bien definida.

Supongamos ahora que $C_1 \subseteq C_2$ y consideremos $a \in F_{C_2}$, se sigue que

$$\begin{aligned} a \in F_{C_2} &\Leftrightarrow C_2 \subseteq \phi_+(a) \\ &\Rightarrow C_1 \subseteq \phi_+(a) \\ &\Rightarrow a \in F_{C_1}. \end{aligned}$$

Luego, F es una aplicación que invierte el orden.

Notemos por último que $C_{F_C} = C$ y $F_{C_F} = F$. En efecto, notemos que, para $P \in C_{F_C}$ obtenemos

$$\begin{aligned} P \in C_{F_C} &\Leftrightarrow P \in \bigcap \{\phi_+(a) : a \in F_C\} \\ &\Leftrightarrow P \in \bigcap \{\phi_+(a) : C \subseteq \phi_+(a)\} \\ &\Leftrightarrow P \in C. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} a \in F_{C_F} &\Leftrightarrow C_F \subseteq \phi_+(a) \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{a \in F} \phi_+(a) \subseteq \phi_+(a) \\ &\Leftrightarrow a \in F. \end{aligned}$$

Obteniendo así un isomorfismo entre los filtros de un retículo distributivo y los cerrados crecientes de su espacio de Priestley asociado. □

Un resultado análogo puede establecerse con los ideales de un retículo L como mostraremos a continuación, utilizando los abiertos crecientes del espacio de Priestley asociado.

Teorema 4.2. *Sea L un retículo distributivo, y sea $(X, \tau, \leq)$ el espacio de Priestley asociado, entonces $(I(F), \subseteq) \simeq (OpUp(X, \tau, \leq))$.*

Demostración. Es análoga al Teorema 4.1, considerando las aplicaciones

$$O : Id(L) \to OpUp(X).$$

$$I \to \bigcup \{\phi_+(a) : a \in F\}.$$

Y, por otro lado,

$$I : OpUp(X) \to Id(L).$$

$$U \to \{a \in L : \phi_+(a) \subseteq U\}.$$

□

Observación 4.1. *Notemos que en vista de los Teoremas 2.3, 2.10 y 4.2 obtenemos el isomorfismo* $(Id(L), \subseteq) \simeq (X, \tau_1)$ *por lo cual, tenemos una caracterización de los ideales en término de los espacios de Priestley, Stone por pares y espectral asociados a L.*
Para el caso de los filtros, solo obtenemos $(Fi(L), \subseteq) \simeq (ClUp(X(L)), \subseteq) \simeq (\delta_2, \subseteq)$.

Nos interesa ahora, caracterizar a los filtros en función del espacio topológico $(X(L), \tau_1)$ para obtener una descripción en función del espacio espectral asociado.

Definición 4.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico, diremos que un conjunto* $A \subseteq X$ *es saturado, si es intersección de abiertos de X. De manera equivalente, diremos que un conjunto A es saturado, si es creciente en el orden de especialización de* (X, τ).
Diremos ademas, que un sub-conjunto es co-saturado, si es unión de cerrados del espacio topológico, ó bien, de manera equivalente, si es un conjunto decreciente en el orden de especialización del espacio topológico (X, τ).

Lema 4.1. *Sea* $(X, \tau, \leq)$ *un espacio de Priestley, y sean* (X, τ_1, τ_2) , (X, τ_1) *sus espacios de Stone por pares y espectral asociados, respectivamente. Entonces, son equivalentes:*

1 A es un creciente de $(X, \tau, \leq)$.

2 A es un sub-conjunto τ_1 *saturado de* (X, τ_1, τ_2).

3 A es un sub-conjunto τ_2 *co-saturado de* (X, τ_1, τ_2).

4 A es saturado en (X, τ_1).

Demostración. Es inmediato a partir de la definición y considerando que $\leq = \leq_1 = \geq_2$. □

De una manera similar, puede establecerse el siguiete resultado.

Lema 4.2. *Sea* $(X, \tau, \leq)$ *un espacio de Priestley, y sean* (X, τ_1, τ_2) , (X, τ_1) *sus espacios de Stone por pares y espectral asociados. Son equivalentes:*

1 A es un decreciente de $(X, \tau, \leq)$.

2 A es un sub-conjunto τ_1 *co-saturado de* (X, τ_1, τ_2).

3 A es un sub-conjunto τ_2 *saturado de* (X, τ_1, τ_2).

4 A es co-saturado en (X, τ_1).

Definición 4.2. *Sea* (X, τ_1, τ_2) *un espacio bi-topológico, definimos*

$$S_i(X) = \{U \subseteq X : U \ \text{ es saturado para } \tau_i\} \quad i = 1, 2.$$

De igual manera, definimos

$$CS_i(X) = \{U \subseteq X : U \ \text{ es co-saturado para } \tau_i\} \quad i = 1, 2.$$

Teorema 4.3. *Sea* $(X, \tau, \leq)$ *un espacio de Priestley,* (X, τ_1, τ_2) *el correspondiente espacio de Stone por pares y sea* (X, τ_1) *su correspondiente espacio espectral. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1 C es un sub-conjunto cerrado creciente de $(X, \tau, \leq)$.

2 C es τ_2 *cerrado.*

3 C es τ_1 *compacto saturado.*

Demostración. $1 \Leftrightarrow 2$) Es claro que, por defininción de τ_2 si C es cerrado creciente, será de inmediato cerrado para τ_2. Por otro lado, si es cerrado para τ_2 se tiene que C, es un conjunto cerrado y creciente.
$1 \Rightarrow 3$) Supongamos que C es cerrado creciente para $(X, \tau, \leq)$, ya que C es creciente, por el Lema 4.1, es saturado para (X, τ_1) y por otro lado, ya que $(X, \tau, \leq)$ es compacto Hausdorff, C es compacto para (X, τ_1).
$3 \Rightarrow 1$) Supongamos que C es τ_1 compacto saturado, veamos que C es cerrado creciente para $(X, \tau, \leq)$.
Dado que que C es τ_1- saturado, se tiene que C es creciente en $(X, \tau, \leq)$. Consideremos $x \notin C$ ya que C es creciente, para cada $c \in C$ obtenemos $c \nleq x$. Por el axioma de separación de Priestley, para cada $c \in C$ existe un clopen creciente U_c tal que $c \in U_c$ y $x \notin U_c$, por lo tanto, se tiene que $C \subseteq \bigcup_{c \in C} U_c$, es un cubrimiento por clopens crecientes, para C.
Puesto que C es compacto, existe un sub-cubrimiento finito $U_{c_1}, \cdots, U_{c_n}$ de manera tal que $C = \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i}$, y por lo cual, $x \in V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{c_i}^c$ que es un clopen decreciente de $(X, \tau, \leq)$ tal que $V \cap C = \emptyset$ de donde se sique que C es cerrado. □

Como corolario de los Teoremas 4.1, 4.2 y 4.3 se obtiene la caracterización de los filtros e ideales de la siguiente manera

Corolario 4.1. *Sea L un retículo distributivo y sea $(X(L), \tau, \leq)$, $(X(L), \tau_1, \tau_2)$ y $(X(L), \tau_1)$ sus espacio de Priestley, Stone por pares, y espectral respectivamente asociados a L, entonces*

1 $Fi(L) \simeq (ClUp(X, \tau, \leq), \subseteq) = (\delta_2, \subseteq) = KS_1(X)$.

2 $Id(L) \simeq (OpUp(X, \tau, \leq), \subseteq) = (\tau_1, \subseteq)$.

Obtenemos entonces caracterizados los filtros e ideales en términos de los espacios de Priestley, espacios de Stone por pares y espacios espectrales.

4.2. Filtros e ideales primos

En el desarrollo de esta sección, daremos la caracterización de filtros primos e ideales primos, en función de sus espacios de Priestley, Stone por pares, y espectrales asociados a un retículo distributivo.

Teorema 4.4. *Sea L un retículo distributivo, y sea $(X(L), \tau, \subseteq)$ el espacio de Priestley asociado. Un filtro P es primo si y solo sí, existe $Q \in X(L)$ tal que $C_P = \uparrow Q$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea P un filtro primo, entonces, consideremos $Q = P$ y veamos que $C_P = \uparrow (P)$. Sea F, un filtro primo tal que $F \in C_P$ entonces, por definición

$$\begin{aligned} F \in \bigcap \{\phi_+(a) : a \in P\} &\Leftrightarrow (\forall a \in P)(F \in \phi_+(a)) \\ &\Leftrightarrow (\forall a \in P)(a \in F) \\ &\Leftrightarrow P \subseteq F \\ &\Leftrightarrow F \in \uparrow (P). \end{aligned}$$

De donde se tiene que $C_P = \uparrow P$.
$\Leftarrow$) Supongamos que existe $Q \in X(L)$ de manera tal que $\uparrow (Q) = C_P$. Puesto que $C_P = \uparrow (P)$, por hipótesis, $\uparrow (P) = \uparrow (Q)$, de donde se sigue que $P = Q$, y por lo cual, P es primo. □

Por otro lado, podemos establecer un resultado análogo para los ideales primos, de la siguiente manera

Teorema 4.5. *Sea L un retículo distributivo, y sea $(X(L), \tau, \subseteq)$ su espacio de Priestley asociado. Un ideal I es primo si y sólo si existe $Q \in X(L)$ de manera tal que $U_I = (\downarrow (Q))^c$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que I es un ideal primo en L, por el Lema 3.3 I^c es un filtro primo, consideremos entonces $Q = I^c$ y veamos que, en efecto, $U_I = (\downarrow (Q))^c = \{P \in X(L) : P \nsubseteq Q\}$. Notemos entonces que

$$\begin{aligned} P \in U_I &\Leftrightarrow \exists a \in I : P \in \phi_+(a) \\ &\Leftrightarrow \exists a \in Q^c : P \in \phi_+(a) \\ &\Leftrightarrow P \nsubseteq Q \\ &\Leftrightarrow P \in (\downarrow (Q))^c. \end{aligned}$$

De donde obtenemos lo afirmado.
$\Leftarrow$) Supongamos que $U_I = \downarrow (Q)^c$ para algún $Q \in X(L)$. Notemos que

$$\begin{aligned} P \in U_I &\Leftrightarrow P \in (\downarrow (Q))^c \\ &\Leftrightarrow P \nsubseteq Q \\ &\Leftrightarrow \exists\, a : a \in P \cap Q^c \\ &\Leftrightarrow P \in \bigcup \{\phi(a) : a \in Q^c\} \\ &= U_{Q^c}. \end{aligned}$$

Puesto que $Q \in X(L)$, por Lema 3.3, Q^c es un ideal primo, y además $U_{Q^c} = U_I$, por lo cual, $I = Q^c$ y así, I es un ideal primo. $\square$

Lema 4.3. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y sea (X, τ_1, τ_2) su espacio de Stone por pares asociado, y (X, τ_1) su espacio espectral asociado, entonces, para $A \subseteq X$*

1 $Cl_1(A) = \downarrow (Cl(A))$.

2 $Cl_2(A) = \uparrow (Cl(A))$.

Demostración. Demostraremos solo (1), la prueba para (2) es análoga.
Notemos que $Cl_1(A) = \bigcap \{U \in \delta_1 : A \subseteq U\}$. Dado que $\downarrow (Cl(A))$ cerrado decreciente, que contiene a A, obtenemos $Cl_1(A) \subseteq \downarrow (Cl(A))$.
Por otro lado, supongamos que $x \notin Cl_1(A)$ entonces, por definición, existe un τ_1 abierto tal que $x \in U$ y además $U \cap A = \emptyset$. Dado que $U \cap A = \emptyset$, y $U \in \tau$ se sigue que $U \cap Cl(A) = \emptyset$, de donde se sigue que $x \notin \downarrow (Cl(A))$ $\square$

Definición 4.3. *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bi-topológico, y sea $A \subseteq X$, definimos la saturación de A, como*

$$Sat_i(A) = \bigcap \{U \in \tau_i : A \subseteq U\} \quad i = 1, 2.$$

Lema 4.4. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y sea (X, τ_1, τ_2) su respectivo espacio de Stone por pares, y sea un cerrado $A \subseteq X$, entonces*

1 $Sat_1(A) = \uparrow_1 (A) = \uparrow (A)$.

2 $Sat_2(A) = \uparrow_2 (A) = \downarrow (A)$.

Demostración. Haremos sólo la prueba de (1), la prueba de (2) es similar.
Notemos que $A \subseteq Sat_1(A)$, y además, $Sat_1(A) = \bigcap \{U \in \tau_1 : A \subseteq U\}$, puesto que es el menor creciente que contiene a A, se tiene que $Sat_1(A) \subseteq \uparrow (A)$.
Por otro lado, supongamos que $x \notin Sat_1(A)$, entonces, existe $U \in \tau_1$ tal que $A \subseteq U$ y $x \notin U$. Luego, para cualquier $a \in A$, $a \nleq_1 x$, de donde se tiene que $x \notin \uparrow_1 (A)$, de donde se sigue que $\uparrow_1 (A) = Sat_1(A)$, se concluye que, por Teorema 2.3, $\uparrow_1 (A) = \uparrow (A) = Sat_1(A)$. $\square$

Corolario 4.2. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y sea (X, τ_1, τ_2) su respectivo espacio de Stone por pares asociado, y sea un cerrado $A \subseteq X$, entonces*

1 $\uparrow(A) = Sat_1(A) = Cl_2(A)$.

2 $\downarrow(A) = Sat_2(A) = Cl_1(A)$.

Demostración. Es inmediato considerando los Lemas 4.3 y 4.4. □

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, es sencillo ahora dar una descripción de los filtros e ideales primos, en función de los espacios de Priestley, Stone por pares y espectrales asociados a un retículo distributivo L.

Corolario 4.3. *Sea L un retículo distributivo acotado, y sean* $(X, \tau, \leq)$, (X, τ_1, τ_2) *y* (X, τ_1) *sus espacios de Priestley, Stone por pares y espectral respectivamente, entonces, son equivalentes*

1 *P es un filtro primo.*

2 $C_P = \uparrow(Q)$ *para algún* $Q \in X$.

3 $C_P = Cl_2(Q)$.

4 $C_P = Sat_1(Q)$.

Corolario 4.4. *Sea L un retículo distributivo acotado, y sean* $(X, \tau, \leq)$, (X, τ_1, τ_2) *y* (X, τ_1) *sus espacios de Priestley, Stone por pares y espectral respectivamente asociados, entonces, son equivalentes*

1 *I es un ideal primo.*

2 $U_I = (\downarrow(Q))^c$ *para algún* $Q \in X$.

3 $U_I = (Cl_1(Q))^c$.

4 $U_I = (Sat_2(Q))^c$.

4.3. Filtros e ideales maximales

Consideraremos el caso de filtros e ideales maximales. En virtud del Lema 3.3, sobre un retículo distributivo, todo filtro maximal es primo, sólo bastará hacer algunas observaciones al desarrollo de la sección anterior para dar una descripción completa de estos objetos algebraicos en términos de espacios de interés.

Definición 4.4. *Sea* $(X, \tau, \leq)$ *un espacio de Priestley, diremos que un elemento x es maximal, si* $x \leq y$ *entonces, deberá ser* $x = y$ *. Indicaremos como* $Max(X)$ *al conjunto de todos los elementos maximales de X.*
Un elemento x se dirá minimal si $y \leq x$ *entonces* $y = x$ *. Indicaremos como* $Min(X)$ *al conjunto de todos los elementos minimales de X.*

Lema 4.5. *Sea L un retículo distributivo, y sea* $(X(L), \tau, \subseteq)$ *el espacio de Priestley asociado a L. Entonces, un filtro P es maximal sí y sólo si* $C_P = \{P\} = \uparrow(P)$.

Demostración. Notemos primero que sobre un retículo distributivo, todo filtro maximal es primo, por lo cual, podemos aplicar el Teorema 4.4. Por último, bastará observar que siendo P maximal, es inmediato que $\uparrow(P) = \{P\}$. □

De una manera similar, puede mostrarse para los ideales maximales el siguiente resultado.

Lema 4.6. *Sea L un retículo distributivo y sea* $(X(L), \tau, \subseteq)$ *su espacio de Priestley asociado. Un ideal I es maximal, si y sólo si* $U_I = (\downarrow(Q))^c = \{Q\}^c$ *para algún* $Q \in X(L)$.

Corolario 4.5. *Sea L un retículo distributivo y sean* $(X, \tau, \leq)$, (X, τ_1, τ_2) *y* (X, τ_1) *sus espacios de Priestley, Stone por pares y espectral asociados, respectivamente, entonces, son equivalentes*

1 P es un filtro maximal.

2 $C_P = \{P\}$ donde $\{P\} = \uparrow (P)$.

3 $C_P = \{P\}$ donde $\{P\} = Cl_2(P)$.

4 $C_P = \{P\}$ donde $\{P\} = Sat_1(P)$.

Un resultado análogo, puede establecerse para ideales maximales

Corolario 4.6. *Sea L un retículo distributivo y sean $(X, \tau, \leq)$, (X, τ_1, τ_2) y (X, τ_1) sus espacios de Priestley, Stone por pares y espectral asociados, respectivamente, entonces, son equivalentes*

1 I es un ideal maximal.

2 $U_I = \{Q\}^c$ donde $\downarrow (Q) = \{Q\}$.

3 $U_I = \{Q\}^c$ donde $Cl_1(Q) = \{Q\}$.

4 $U_I = \{Q\}^c$ donde $\{Q\} = Sat_2(Q)$.

4.4. Sub-Retículos

En el desarrollo de esta sección, daremos una caracterización de los sub-retículos de un retículo distributivo acotado, para los espacios de Priestley, Stone por pares y espectral asociados a un retículo distributivo L.

Definición 4.5. *Sea X un conjunto no vacío, llamaremos Quasi-orden, a una relación $Q \subseteq X \times X$ que verifica ser reflexiva y transitiva.*

Definición 4.6. *Sea (X, Q) un conjunto quasi-ordenado, un sub-conjunto $A \subseteq X$ se dirá Q-creciente si $x \in A$, $xQy \Rightarrow y \in A$.*

Definición 4.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y Q un quasi-orden sobre X. Diremos que Q es un quasi-orden de Priestley sobre (X, τ), si para cada $x, y \in X$ con $x \not{Q}\, y$ existe un clopen Q-creciente de manera tal que $x \in U$ $y \notin U$.*

Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley. Indicaremos como Q_X al conjunto de todos los quasi-ordenes de Priestley definidos sobre X, que contienen al orden parcial del espacio $\leq$.

Observación 4.2. *Notemos que, si $\leq_1$ y $\leq_2$ son dos relaciones de orden, (resp, quaasi órdenes), y supongamos que $\leq_1 \subseteq \leq_2$, si U es $\leq_2$ creciente, entonces U es $\leq_1$ creciente. En efecto, sea $x \in U$ y sea $x \leq_1 y$, entonces, $x \leq_2 y$, y puesto que U es $\leq_2$ creciente, se tiene que $y \in U$, entonces, U resulta $\leq_1$ creciente.*

Teorema 4.6. *Sea L un retículo distributivo acotado, y sea $(X(L), \tau, \leq)$ el espacio de Priestley asociado a L, entonces*

$$(S_L, \subseteq) \simeq (Q_X, \subseteq).$$

Donde $(S_L, \subseteq)$ es el conjunto parcialmente ordenado de los sub-retículos de un retículo distributivo L.

Demostración. Consideremos la aplicación

$$Q : S_L \to Q_X.$$

$$S \to Q_S.$$

Donde, Q_S es un quasi-orden de Priestley definido sobre $X(L)$ como sigue

$$(F_1, F_2) \in Q_S \Leftrightarrow F_1 \cap S \subseteq F_2 \cap S.$$

Es inmediato verificar que es un quasi-orden, veamos que es un quasi-orden de Priestley.
Supongamos que $F_1 \not{Q}_S F_2$ entonces, por definición, $F_1 \cap S \not\subseteq F_2 \cap S$. Es decir, existe un elemento $a \in F_1 \cap S$ tal que $a \notin F_2 \cap S$. Consideremos el clopen Q_S-creciente $\phi_+(a)$, se sigue entonces que $F_1 \in \phi_+(a)$ y $F_2 \notin \phi_+(a)$, por lo tanto Q_S es un quasi-orden de Priestley, y la aplicación Q está bien definida.
Notemos además que si $S_1 \subseteq S_2$ entonces, $Q_{S_2} \subseteq Q_{S_1}$, en efecto

$$\begin{aligned} (F_1, F_2) \in Q_{S_2} &\Leftrightarrow F_1 \cap S_2 \subseteq F_2 \cap S_2 \\ &\Rightarrow F_1 \cap S_1 \subseteq F_2 \cap S_1 \\ &\Leftrightarrow (F_1, F_2) \in Q_{S_1}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, definimos la aplicación

$$S : Q_X \to S_L.$$

$$Q \to S_Q = \{a \in L : \phi_+(a) \text{ es Q-creciente } \}.$$

Notemos que, en efecto, S_Q es un sub-retículo, puesto que, si $a, b \in S_Q$ entonces, $\phi_+(a)$ y $\phi_+(b)$, son Q-crecientes, y por tanto $\phi_+(a \wedge b) = \phi_+(a) \cap \phi_+(b)$, es Q-creciente, por lo cual, $a \wedge b \in S_Q$. De igual manera, se prueba que $a \vee b \in S_Q$, y por lo cual S_Q es un sub-retículo.
Supongamos ahora que $Q_1 \subseteq Q_2$ y sea $a \in S_{Q_2}$ entonces, notemos que $\phi_+(a)$ es Q_2 creciente. Siendo que $Q_1 \subseteq Q_2$, se sigue de la observación 4.2 que $\phi_+(a)$ es Q_1 creciente, y por lo cual $a \in S_{Q_1}$, de donde se tiene que $S_{Q_2} \subseteq S_{Q_1}$.
Por último, notemos que $Q_{S_Q} = Q$ y además $S_{Q_S} = S$, en efecto,

$$\begin{aligned} (F_1, F_2) \in Q_{S_Q} &\Leftrightarrow F_1 \cap S_Q \subseteq F_2 \cap S_Q \\ &\Leftrightarrow (F_1, F_2) \in Q. \end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} a \in S_{Q_S} &\Leftrightarrow \phi_+(a) \text{ es creciente para } Q_S \\ &\Leftrightarrow a \in S. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces, un isomorfismo entre los conjuntos ordenados propuestos. □

Consideremos ahora, $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y (X, τ_1, τ_2) el espacio de Stone por pares asociado, estableceremos una caracterización del poset $(Q_X, \subseteq)$ en términos del espacio (X, τ_1, τ_2).

Definición 4.8. *Sea X un conjunto no vacío, y sean (τ_1, τ_2) y (τ_1', τ_2') dos bi-topologías definidas sobre X. Diremos que (τ_1, τ_2) es mas gruesa que (τ_1', τ_2'), si se verifican*

$$\tau_1 \subseteq \tau_1' \quad y \quad \tau_2 \subseteq \tau_2'.$$

Consideremos $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y sea (X, τ_1, τ_2) el espacio de Stone por pares asociado, indicaremos como Z_X al conjunto de todas las bi-topologías cero dimensionales por pares mas gruesas que (τ_1, τ_2).

Teorema 4.7. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y sea (X, τ_1, τ_2) el espacio de Stone por pares asociado, entonces*

$$(Q_X, \subseteq) \simeq (Z_X, \subseteq).$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$Z : Q_X \to Z_X.$$

$$Q \to (\tau_1^Q, \tau_2^Q).$$

Donde, $\tau_1^Q = \{U \in \tau : U$ es Q-creciente en X$\}$ y $\tau_2^Q = \{U \in \tau : U$ es Q-decreciente$\}$. Es claro, a partir de la observación 4.2, que es una bi-topología más gruesa que (τ_1, τ_2).
Por otro lado, de la misma definición de (τ_1^Q, τ_2^Q) obtenemos

$$\beta_1^Q = \{U \subseteq X : U \text{ es Clopen Q-creciente}\} \quad \beta_2^Q = \{U \subseteq X : U \text{ es Clopen Q-decreciente}\}.$$

En vista del Lema 2.1, β_1^Q resulta base para τ_1^Q y β_2^Q es base para τ_2^Q entonces (τ_1^Q, τ_2^Q) es cero dimensional por pares.
Además, supongamos que $Q, R \in Q_X$ de manera tal que $Q \subseteq R$, notemos que $(\tau_1^R, \tau_2^R) \subseteq (\tau_1^Q, \tau_2^Q)$, en efecto, sea $U \in \tau_1^R$, se sigue entonces que U es abierto y R-creciente. Puesto que $Q \subseteq R$, U es Q-creciente, entonces $U \in \tau_1^Q$, de igual modo, se prueba que $\tau_2^R \subseteq \tau_2^Q$ y así, se obtiene que Z, es una aplicación que invierte el orden.

Por otro lado, definimos

$$Q : Z_X \to Q_X.$$

$$(\tau_1', \tau_2') \to Q_{(\tau_1', \tau_2')}.$$

Donde $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$ es el orden de especialización de τ_1'. Dado que el orden de especialización para cualquier espacio topológico es un orden de Priestley, la buena definición de la aplicación es inmediata. Consideremos $(\tau_1', \tau_2') \subseteq (\tau_1'', \tau_2'')$, y sea $(x, y) \in Q_{(\tau_1'', \tau_2'')}$ entonces, por definición, para todo $U \in \tau_1''$ si $x \in U$ entonces $y \in U$. Dado que $\tau_1' \subseteq \tau_1''$ se sigue que $(x, y) \in Q_{(\tau_1', \tau_2')}$ y así, se tiene que Q es una aplicación que invierte el orden.
Restará ver entonces, que tanto Z como Q son aplicaciones inversas una de la otra.
Consideremos un quasi-orden de Priestley definido sobre X, y mostremos que $Q = Q_{(\tau_1^Q, \tau_2^Q)}$.
Consideremos $(x, y) \in Q_{(\tau_1^Q, \tau_2^Q)}$ y notemos que

$$\begin{aligned} (x, y) \in Q_{(\tau_1^Q, \tau_2^Q)} &\Leftrightarrow (\forall U \in \tau_1^Q)(x \in U \Rightarrow y \in U) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in Q. \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $(\tau_1', \tau_2') \in Z_X$, veamos que $(\tau_1', \tau_2') = (\tau_1^{Q_{(\tau_1', \tau_2')}}, \tau_2^{Q_{(\tau_1', \tau_2')}})$.
Realizaremos la prueba para $\tau_1' = \tau_1^{Q_{(\tau_1', \tau_2')}}$, la prueba para la restante topología es análoga.
Claramente, si $U \in \tau_1'$ entonces U es abierto en τ y además es $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$ creciente, de donde se sigue que $U \in \tau_1^{Q_{(\tau_1', \tau_2')}}$. Por otro lado, sea $U \in \tau_1^{Q_{(\tau_1', \tau_2')}}$, veamos que $U = \bigcup\{V \in \tau_1' : V \subseteq U\}$.
Es claro que $\bigcup\{V \in \tau_1' : V \subseteq U\} \subseteq U$. Sea $x \in U$, Dado que U es $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$ creciente, para cada $y \in U^c$ obtenemos $x \not\!Q_{(\tau_1', \tau_2')} y$ y por lo tanto, existe un clopen $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$ creciente, i.e, $V_x \in \beta_1'$, tal que $x \in V_x$, $y \notin V_x$.
Obetenemos entonces que $\bigcap\{V_x : x \in U\} \cap U^c = \emptyset$. Puesto que (X, τ), donde $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$ es compacto, y la familia $\{V_x : x \in U\} \cup U^c$ cerrados para τ, existe entonces una sub-familia $V_{x_1}, \cdots, V_{x_n}$ de manera tal que $\bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \cap U^c = \emptyset$, de donde se sigue que $x \in V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n} \subseteq U$. Puesto que β_1' es cerrado por intersecciones finitas, se sigue que $U \subseteq \bigcup\{V \in \tau_1' : V \subseteq U\}$ y por lo tanto $U \in \tau_1'$, como queríamos mostrar. □

Consideremos (X, τ_1, τ_2) un espacio de Stone por pares y (X, τ_1) su espacio espectral asociado, estableceremos a continuación un isomorfismo de orden, entre Z_X y el conjunto ordenado por la inclusión, de las topologías fuertemente coherentes mas gruesas que (X, τ_1).

Definición 4.9. *Sea (X,τ) un espacio espectral, y sea τ' una topología coherente definida sobre X y más guesa que (X,τ) . Diremos que τ' es fuertemente coherente, si $\epsilon(X,\tau') = \tau' \cap \sigma' = \tau' \cap \sigma$. Indicaremos como $(SC_X, \subseteq)$ al conjunto parcialemte ordenado por la inclusión, de las topologías fuertemente coherentes definidas sobre X.*

Teorema 4.8. *Sea (X,τ_1,τ_2) un espacio de Stone por pares, y sea (X,τ_1) su espacio espectral asociado, entonces*

$$(Z_X, \subseteq) \simeq (SC_X, \subseteq).$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\Lambda : Z_X \to SC(X).$$

$$(\tau_1', \tau_2') \to \tau_1'.$$

Es inmediato, por definición, que τ_1' es más gruesa que τ_1. Será suficiente mostrar que $\epsilon(X,\tau_1') = \beta_1' = \tau_1' \cap \sigma_1$.
Sea $U \in \epsilon(X,\tau_1')$. Puesto que β_1' es una base para τ_1' obtenemos $U = \bigcup\{V \in \beta_1' : V \subseteq U\}$. Puesto que U es compacto, existen $V_1 \cdots V_n \in \beta_1'$ de manera tal que $U = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, de donde se sigue que $U \in \beta_1'$. Por otro lado, consideremos $U \in \beta_1'$, se sigue entonces que

$$U \in \beta_1' = \tau_1' \cap \delta_2' \subseteq \tau_1' \cap \delta_2 \subseteq \tau_1' \cap \sigma_1.$$

De donde se sigue que $\beta_1' \subseteq \tau_1' \cap \sigma_1$.
Por último, consideremos $U \in \tau_1' \cap \sigma_1$, siendo U abierto para τ_1' entonces U es unión de elementos de β_1'. Dado que U es τ_1 compacto se deduce que es compacto para τ_1', de donde se sigue que $U \in \epsilon(X,\tau_1')$, así se tiene entonces que (X,τ_1') es un espacio topológico fuertemente coherente, y la aplicacíon Λ está bien definida.
Además, es inmediato notar que Λ es una aplicación que preserva el orden.

Por otro lado, consideremos la aplicación

$$\Psi : SC(X) \to Z_X.$$

$$\tau_1' \to (\tau_1', \tau_2').$$

Donde, τ_2' es la topología generada por la base $\Delta(X,\tau_1') = \{U^c : U \in \epsilon(X,\tau_1')\}$.
Indicaremos como δ_1' a los cerrados para τ_1', del mismo modo, δ_2' para los cerrados de τ_2'.
Mostraremos que $\beta_1' = \tau_1' \cap \delta_2' = \epsilon(X,\tau_1')$ y además $\beta_2' = \tau_2' \cap \delta_1' = \Delta(X,\tau_1')$.
De la propia definición de (τ_1',τ_2') se tiene que $\epsilon(X,\tau_1') \subseteq \beta_1'$. Consideremos ahora $U \in \beta_1'$ entonces

$$U \in \beta_1' = \tau_1' \cap \delta_2' \subseteq \tau_1' \cap \delta_2 \subseteq \tau_1 \cap \sigma_1.$$

De donde se sigue entonces que $\beta_1' \subseteq \epsilon(X,\tau_1')$ por ser (X,τ_1') fuertemente coherente.
Por otro lado, a partir de lo anterior, es inmediato que $\beta_2' = \Delta(X,\tau_1')$, se sigue entonces que (τ_1',τ_2') es una bi-topología cero dimensional por pares.
Luego, la aplicación Ψ está bien definida, y además preserva el orden, en efecto, consideremos $\tau_1' \subseteq \tau_1''$ mostraremos que $(\tau_1',\tau_2') \subseteq (\tau_1'',\tau_2'')$. Es claro, que $\tau_1' \subseteq \tau_1''$, mostraremos $\tau_2' \subseteq \tau_2''$.
Sea $U \in \Delta(X,\tau_1')$ entonces, $U^c \in \epsilon(X,\tau_1') \subseteq \epsilon(X,\tau_1'')$ por lo cual $U \in \Delta(X,\tau_1'')$ y así, se tiene que $\tau_2' \subseteq \tau_2''$. Por último, notemos que, para $(\tau_1',\tau_2') \in Z_X$ se tiene que $\Psi(\Lambda((\tau_1',\tau_2'))) = (\tau_1',\tau_2')$ y, de igual modo, se tiene que, para $\tau_1' \in SC(X)$, $\Lambda(\Psi(\tau_1')) = \tau_1'$, de donde se tiene el isomorfismo. □

Como consecuencia de los teoremas 4.6, 4.7 y 4.8 se tiene la caracterización de los sub-retículos en cada uno de sus espacios duales, tanto Priestley, como Stone por pares, y espectrales como se muestra en la tabla al final de la sección.

Corolario 4.7. *Sea L un retículo distributivo acotado, y sea $(X, \tau, \leq)$, (X, τ_1, τ_2) y (X, τ_1) sus espacios asociados de Priestley, par-Stone y espectral respectivamente, entonces*

$$(S_L, \subseteq) \simeq (Q_X, \subseteq) \simeq (Z_X, \subseteq) \simeq (SC_X, \subseteq).$$

.

De esta manera, obetenemos una lectura topológica de los conceptos algebraicos de interés en función de los espacios topológicos asociados en los capítulos anteriores. A modo de resumen de este capítulo presentamos una tabla que resume de forma clara y concisa la información presentada.

Dualidad de conceptos algebraicos

DLat	**Priest**	**PStone**	**Spec**
Filtro	ClUP	τ_2 cerrados	KS(X)
Filtro Primo	$\uparrow(Q)$	$Cl_2(Q)$	$Sat_1(Q)$
Filtro Max	$\{Q\}$	$Cl_2(Q) = \{Q\}$	$Sat_1(Q) = \{Q\}$
Ideal	OpUp(X)	τ_1 abiertos	τ_1 abiertos
Ideal Primo	$(\downarrow(Q))^c$	$(Cl_2(Q))^c$	$(Sat_1(Q))^c$
Ideal Max	$\{Q\}^c$	$(Cl_2(Q))^c = \{Q\}^c$	$(Sat_1(Q))^c = \{Q\}^c$
$(S_X, \subseteq)$	$(Q_X, \subseteq)$	$(Z_X, \subseteq)$	$(SC_X, \subseteq)$

Capítulo 5

Dualidad para álgebras de Heyting

5.1. Algebras de Heyting

Definición 5.1. *Un álgebra* $< L, \vee, \wedge, \rightarrow, 1, 0 >$ *de tipo* $< 2, 2, 2, 0, 0 >$ *es un álgebra de Heyting si verifica:*

- $< L, \vee, \wedge, 0, 1 >$ *es un retículo.*
- *La operación*

  $$\rightarrow: L \times L \longrightarrow L$$
  $$(a, b) \longrightarrow a \rightarrow b$$

  verifica la siguiente propiedad

  $$c \leq a \rightarrow b \Leftrightarrow c \wedge a \leq b.$$

Definición 5.2. *Sean* L_1 *y* L_2 *dos álgebras de Heyting. Una aplicación* $h : L_1 \rightarrow L_2$ *es un morfismo de álgebras de Heyting si verifica:*

- h *es un morfismo de retículos distributivos.*
- $h(a \rightarrow b) = h(a) \rightarrow h(b)$.

Definición 5.3. *Definimos* ***Hey*** *a la categoría cuyos objetos son las álgebras de Heyting cuyos morfismos son los morfismos de álgebras de Heyting.*

Proposición 5.1. *Sea* L *un álgebra de Heyting, son válidas las siguientes propiedades:*

- $1 \rightarrow a = a$ *y además* $a \rightarrow a = 1$ $\forall a \in L$.
- $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$.
- $a \leq b \Leftrightarrow a \rightarrow b = 1$.
- *Si* $a \leq b$ *entonces* $\forall c \in L$ $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ *y además* $a \rightarrow c \leq b \rightarrow c$.
- $b \leq a \rightarrow b$.
- $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$.
- $a \wedge (b \rightarrow c) = a \wedge ((a \wedge b) \rightarrow (a \wedge c))$.
- $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \wedge b) \rightarrow c$.
- $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)$.

Demostración. Puede encontrarse en [1] □

Lema 5.1. *Toda álgebra de Heyting, es un retículo distributivo.*

Demostración. Para cualquier retículo, siempre vale la desigualdad

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Bastará entonces, probar que vale la restante desigualdad.
Notemos que

$$a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \Rightarrow b \leq a \to ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)).$$

Y, de igual modo

$$a \wedge c \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \Rightarrow c \leq a \to ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)).$$

Luego,

$$b \vee c \leq a \to ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)).$$

Y, por definición de la implicación, obtenemos

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Como queríamos demostrar.

□

Es importante notar, que todos los resultados vistos para retículos distributivos, aplican a las álgebras de Heyting, puesto que, en vista del Lema 5.1, se obtiene que **Hey** $\subseteq$ **DLat**.

5.2. Dualidad Esakia

Como hemos observado en la sección anterior, la categoría de las álgebras de Heyting con sus respectivos morfismos, son una sub-categoría de **DLat**. Estableceremos entonces, una equivalencia dual de estas algebras en función de espacios topológicos de Priestley particulares, a los cuales llamaremos como espacios de Esakia, ver [6].
Recordemos que para un espacio topológico (X, τ) indicamos al conjunto de los clopen como $Clop(X)$.

Definición 5.4. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, diremos que $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de Esakia si $A \in Clop(X)$ entonces $\downarrow(A) \in Clop(X)$.*

Definición 5.5. *Sean $(X, \tau, \leq)$ y $(Y, \tau', \leq')$ dos espacios de Esakia, una aplicación $f : X \to Y$ es un p-morfismo si preserva el orden, y además, para cada $x \in X$ $y \in Y$, si $f(x) \leq y$ entonces, existe $x' \in X$ tal que $x \leq x'$ y además $f(x') = y$.*

Definición 5.6. *Sean $(X, \tau, \leq)$ y $(X', \tau', \leq')$ dos espacios de Esakia, una aplicación $f : X \to X'$ es un morfismo de Esakia, si es un p-morfismo continuo.*

Definición 5.7. *Usaremos **Esa** para referirnos a la categoría de los espacios de Esakia con sus repectivos morfismos de Esakia. Es inmediato observar, que **Esa** $\subseteq$ **Pries**.*

Sea A un álgebra de Heyting, y consideremos sobre el conjunto de los filtros primos $X(A)$, la topología τ, generada por la sub-base $\beta = \{\phi_+(a) : a \in A\} \cup \{\phi_-(a) : a \in A\}$, recordemos que de este modo obtenemos un espacio de Priestley, del cual obtenemos un retículo distributivo considerando el conjunto $\phi_+[A] = \{\phi_+(a) : a \in A\}$, es decir, los clopen crecientes.
Notemos que, es necesario ahora recuperar sobre $\phi_+[A]$ un álgebra de Heyting, para esto, definimos la implicación sobre el retículo de los clopen crecientes como

$$\begin{aligned} \phi_+(a) \to \phi_+(b) &= (\downarrow(\phi_+(a) \cap \phi_+(b)^c))^c \\ &= (\downarrow(\phi_+(a) \cap \phi_-(b)))^c \\ &= \{P \in X(A) : \uparrow(P) \cap \phi_+(a) \subseteq \phi_+(b)\} \end{aligned}$$

Lema 5.2. *Sea A un álgebra de Heyting. Consideremos la familia $\phi_+(A) = \{\phi_+(a) : a \in A\}$, entonces $\phi_+(a \to b) = \phi_+(a) \to \phi_+(b)$.*

Demostración. Consideremos $P \in \phi_+(a \to b)$ y sea $Q \in \uparrow (P) \cap \phi_+(a)$, se sigue entonces que tanto a como $a \to b \in Q$, luego, $a \wedge (a \to b) = a \wedge b \in Q$ y por lo tanto $b \in Q$, de donde se sigue que $\uparrow (P) \cap \phi_+(a) \subseteq \phi_+(b)$, así se tiene que $\phi_+(a \to b) \subseteq \phi_+(a) \to \phi_+(b)$.
Recíprocamente consideremos $P \in \phi_+(a) \to \phi_+(b)$ y supongamos, por absurdo, que $P \notin \phi(a \to b)$. Desde que $P \notin \phi_+(a \to b)$ se sigue que $a \to b \notin P$, de donde

$$\downarrow (a \to b) \cap P = \emptyset.$$

Por el teorema del filtro primo, existe $Z \in X(A)$ de manera tal que $P \subseteq Z$ y $a \to b \notin Z$.
Puesto que $\uparrow (P) \cap \phi_+(a) \subseteq \phi_+(b)$ se sigue que $Z \in \phi_+(b)$, es decir, $b \in Z$ y dado que $b \leq a \to b$, se sigue que $a \to b \in Z$, lo que resulta imposible. $\square$

Teorema 5.1. *Sea A un álgebra de Heyting, entonces $(X(A), \tau, \subseteq)$ es un espacio de Esakia.*

Demostración. En vista de la dualidad de Priestley establecida en 3.8, es inmediato entonces que $(X(A), \tau, \subseteq)$ es un espacio de Priestley. Veamos entonces que si $U \in Clop(X(A))$ entonces, $\downarrow (U) \in Clop(X(A))$. En efecto, en vista del Lema 2.1, sabemos que

$$CpUp(X(A)) = \{\phi_+(a) : a \in A\} \text{ y además } CpDo(X(A)) = \{\phi_-(a) : a \in A\}.$$

Se sigue entonces que $U = \phi_+(a) \cap \phi_-(b)$ para algunos $a, b \in A$. Por otro lado, notemos que

$$\phi_+(a \to b) = (\downarrow (\phi_+(a) \cap \phi_-(b)))^c.$$

Que es un clopen, de donde, $\downarrow (\phi_+(a) \cap \phi_-(b)) = \downarrow (U)$ es clopen, y así, $(X(A), \tau, \subseteq)$ es un espacio de Esakia. $\square$

Teorema 5.2. *Sean A_1 y A_2 dos álgebras de Heyting, y sea $h : A_1 \to A_2$ un homomorfismo de álgebras de Heyting, entonces la aplicación*

$$f_h : X(A_2) \to X(A_1).$$

$$P \to h^{-1}(P).$$

Es un morfismo entre los espacios de Esakia asociados a A_1 y A_2 respectivamente.

Demostración. En vista del Teorema 3.5, la aplicación f_h preserva el orden y además es continua. Restará ver que es un p- morfismo. Consideremos $P \in X(A_2)$ y sea $Q \in X(A_1)$ de manera tal que $f_h(P) \subseteq Q$. Es sencillo verificar que $h(Q^c)$ es un ideal en $X(A_2)$, y notemos que

$$\uparrow (P \cup h(Q)) \cap h(Q^c) = \emptyset.$$

En efecto, supongamos que existen $p \in P$, $q \in Q$ y $d \in Q^c$ de manera tal que

$$\begin{aligned} p \wedge h(q) \leq h(d) \quad &\Rightarrow \quad p \leq h(q) \to h(d) \\ &\Rightarrow \quad p \leq h(q \to d) \\ &\Rightarrow \quad h(q \to d) \in P \end{aligned}$$

Dado que $P \subseteq h^{-1}(Q)$ se sigue que $q \to d \in Q$ y Dado que $q \in Q$, obtenemos que $d \in Q$ lo que resulta imposible, por lo cual, se sigue que $\uparrow (P \cup h(Q)) \cap h(Q^c) = \emptyset$. Por el Teorema 3.2 existe $Z \in X(A_2)$ de manera tal que $P \subseteq Z$ y además $f_h(Z) = Q$, como queríamos mostrar. $\square$

Definición 5.8. *Sean* $\boldsymbol{Hey}$ *y* $\boldsymbol{Esa}$ *las categorías de Heyting y Esakia, respectivamente, definimos el funtor*

$$E : \boldsymbol{Hey} \to \boldsymbol{Esa}.$$

$$A \to (X(A), \tau, \subseteq).$$

Además, para un morfismo de álgebras de Heyting $h : A_1 \to A_2$ *la aplicación* $E(h) = f_h = h^{-1}$ *es un morfismo entre los espacios de Esakia asociados a* A_1 *y* A_2 *respectivamente.*

Por otro lado, consideremos $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Esakia, y consideremos además el conjunto $CpUp(X)$ de los clopen crecientes de dicho espacio. En vista de la dualidad de Priestley, $CpUp(X)$ es un retículo distributivo. Más aún, definimos la aplicación

$$\to: CpUp(X) \times CpUp(X) \longrightarrow CpUp(X).$$

$$(U, V) \longrightarrow U \to V.$$

Donde el nuevo conjunto es definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U \to V &= (\downarrow (U \cap V^c))^c \\ &= \{x \in X : \uparrow (x) \cap U \subseteq V\} \end{aligned}$$

La buena definición de la operación $\to$ se sigue de la propiedad de Esakia, donde el decreciente generado por un clopen, es clopen.

Teorema 5.3. *Sea* $(X, \tau, \leq)$ *un espacio de Esakia, entonces* $< CpUp(X), \cap, \cup, \emptyset, X, \to >$ *es un álgebra de Heyting.*

Demostración. Como hemos demostrado antes en el Teorema 3.6, es un retículo distributivo. Veamos ahora que, para U, V y $W \in CpUp(X)$ se tiene que $U \cap V \subseteq W \Leftrightarrow U \subseteq V \to W$.
Supongamos que $U \cap V \subseteq W$, y sea $x \in U$, veamos que $x \in V \to W$.
Consideremos $y \in \uparrow (x) \cap V$, puesto que U es creciente y $x \in U \cap V$, se sigue que $y \in U \cap V$. Dado que $U \cap V \subseteq W$ obtenemos $y \in W$ y así $\uparrow (x) \cap V \subseteq W$, con lo cual, $U \subseteq V \to W$.
Es fácil verificar la afirmación recíproca, de donde se obtiene entonces, un álgebra de Heyting. □

Lema 5.3. *Sean* $(X, \leq)$ *y* $(X', \leq')$ *dos conjuntos parcialmente ordenados, y* $f : X \to X'$ *una aplicación, son equivalentes:*

1 f *es un p-morfismo.*

2 $f(\uparrow (x)) = \uparrow (f(x))$.

3 $f^{-1}(\downarrow (x')) = \downarrow (f^{-1}(x'))$.

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2) Supongamos que f es un p morfismo, veamos entonces que $f(\uparrow (x)) = \uparrow (f(x))$. Consideremos $y \in f(\uparrow (x))$, por definición, existe $z \in X$ de manera tal que $f(z) = y$ y además $x \leq z$. Puesto que f es un p morfismo, se tiene que $f(x) \leq f(z) = y$, de donde se sigue que $y \in \uparrow (f(x))$.
Por otro lado, sea $y \in \uparrow (f(x))$, por definición, $f(x) \leq y$. Puesto que f es p morfismo, existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $f(z) = y$. Luego, $z \in \uparrow (x)$, se sigue que $y \in f(\uparrow (x))$. Así, se obtiene que $f(\uparrow (x)) = \uparrow (f(x))$.
2 $\Rightarrow$ 3) Supongamos que $f(\uparrow (x)) = \uparrow (f(x))$ veamos entonces que $f^{-1}(\downarrow (x)) = \downarrow (f^{-1}(x))$. Consideremos $z \in f^{-1}(\downarrow (x))$, entonces $f(z) \in \downarrow (x)$, es decir, $f(z) \leq x$. Se sigue que $x \in \uparrow (f(z)) = f(\uparrow (z))$, de donde se sigue que $f^{-1}(x) \in \uparrow (z)$ o lo que es lo mismo, $z \in \downarrow (f^{-1}(x))$.
Por otro lado, consideremos $z \in \downarrow (f^{-1}(x))$, se sigue que $z \leq f^{-1}(x)$, o lo que es lo mismo, $f^{-1}(x) \in \uparrow (z)$, de donde $x \in f(\uparrow (z)) = \uparrow (f(z))$. Se sigue entonces que $f(z) \leq x$, de donde $z \in f^{-1}(\downarrow (x))$. Así se tiene que $f^{-1}(\downarrow (x)) = \downarrow (f^{-1}(x))$.

3 $\Rightarrow$ 1) Consideremos $f^{-1}(\downarrow (x)) = \downarrow (f^{-1}(x))$, veamos que f es p morfismo. Sea $f(x) \leq y$, se sigue entonces que $f(x) \in \downarrow (y)$ por lo cual, $x \in f^{-1}(\downarrow (y)) = \downarrow (f^{-1}(y))$, es decir, $x \leq f^{-1}(y)$. Consideremos entonces $z = f^{-1}(y)$ y es claro entonces que $x \leq z$ y $f(z) = y$, así f es p morfismo. $\square$

Teorema 5.4. *Sean $(X, \tau, \leq)$ y $(X', \tau', \leq')$ dos espacios de Esakia. Sea $f : X \to X'$ un morfismo entre espacios de Esakia, entonces la apliacación*

$$h_f : CpUp(X') \to CpUp(X).$$

$$U \to f^{-1}(U).$$

Es un homomorfismo de álgebras de Heyting.

Demostración. Como ya hemos demostrado en 3.7, la aplicación h_f es un homomorfismo de retículos distributivos, bastará entonces mostrar que $h_f(U \to V) = h_f(U) \to h_f(V)$. Notemos que, por ser f un p morfismo, y por el Lema 5.3

$$\begin{aligned} x \in h_f(U \to V) &\Leftrightarrow f(x) \in U \to V \\ &\Leftrightarrow \uparrow (f(x)) \cap U \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \uparrow (x) \cap h_f(U) \subseteq h_f(V) \\ &\Leftrightarrow x \in h_f(U) \to h_f(V). \end{aligned}$$

$\square$

Definición 5.9. *Sean **Esa** y **Hey** las categorías de espacios de Esakia y Heyting respectivamente, definimos el funtor*

$$H : \textbf{\textit{Esa}} \to \textbf{\textit{Hey}}.$$

$$(X, \tau, \leq) \to < CpUp(X), \cap, \cup, \emptyset, X, \to > .$$

Además, sea $f : (X, \tau, \leq) \to (X', \tau', \leq')$ un morfismo de espacios de Esakia, la aplicación $H(f) = h_f = f^{-1}$ es un morfismo de álgebras de Heyting.

Teorema 5.5. *Las categorías **Hey** y **Esa** son dualmente equivalentes.*

Demostración. Consideremos A un álgebra de Heyting, y mostraremos que $H(E(A)) \simeq A$. En efecto, recordemos que $H(E(A)) =< CpUp(X(A)), \cap, \cup, \emptyset, X(A), \to >$. Consideremos la aplicación

$$\phi_+ : A \to CpUp(X(A)).$$

$$a \to \phi_+(a) = \{U \in X(A) : a \in U\}.$$

Como ya hemos mostrado en 3.8, es un isomorfismo de retículos distributivos, además por el Lema 5.2 obtenemos que ϕ_+ es un isomorfismo de álgebras de Heyting.

Por otro lado, sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Esakia, consideremos $E(H(X)) = (X', \tau', \leq')$ donde $X' = X(CpUp(X))$ y τ' es la topología definida sobre el conjunto de los filtros primos, de los clopen crecientes de X, que tiene como sub-base a $\{\phi_+(U) : U \in CpUp(X)\} \cup \{\phi_-(U) : U \in CpUp(X)\}$. Veamos que $X \simeq E(H(X))$. Consideremos la aplicación

$$\xi : X \to E(H(X)).$$

$$x \to \xi(x) = \{U \in CpUp(X) : x \in U\}.$$

Como ya hemos mostrado en 3.4, es un homeomorfismo entre espacios de Priestley asociados, y en consecuencia es un homeomorfismo entre los espacios de Esakia. $\square$

Observación 5.1. *Notemos que la dualidad de Esakia, es la misma dualidad que la establecida por Priestley, restringida a la sub-categoría de las álgebras de Heyting, y espacios de Esakia, respectivamente*

5.3. Espacios Esakia y Bi- topológicos de Esakia

Así como en el capítulo 2, hemos mostrado que los espacios de Stone por pares son isomorfos a los espacios de Priestley y a los espacios espectrales, mostraremos en esta sección que los espacios bi-topológicos de Esakia, son isomorfos a los espacios de Esakia, y a los espacios espectrales de Esakia.

Definición 5.10. *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bi-topológico, diremos que $U \subseteq X$ es un conjunto clopen por pares, si tanto U como U^c son ambos, compactos por pares. Indicaremos como $PC(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos clopen por pares.*

Definición 5.11. *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio de Stone por pares, diremos que (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi-topológico de Esakia, si $U \in PC(X)$ entonces $Cl_1(U) \in PC(X)$.*

Definición 5.12. *Sea (X, τ) un espacio espectral, un sub conjunto $Y \subseteq X$, se dirá espectral si (Y, τ_Y), es un espacio espectral y además si $U \in \epsilon(X) \Rightarrow U \cap Y \in \epsilon(Y)$.*

Lema 5.4. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y sean (X, τ_1, τ_2) y (X, τ_1) su espacio de Stone por pares y espectral asociados. Sea $U \subseteq X$ entonces, son equivalentes:*

1 U es clopen en $(X, \tau, \leq)$.

2 U y U^c son compactos por pares.

3 U y U^c son sub conjuntos espectrales.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Consideremos $\{V_i\}_{i \in J}$ un cubrimiento para U, por elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$. Puesto que U es clopen, se sigue que

$$X \subseteq U^c \cup \bigcup_{i \in J} V_i.$$

Puesto que X es compacto, existen $V_1 \cdots V_n$ de manera tal que $X \subseteq U^c \cup \cdots \cup V_n$, de donde se sigue que $U \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$, y así, U es compacto por pares. De igual manera se obtiene que U^c es compacto por pares.
$2 \Rightarrow 1$) Es inmediato, ya que por Lema 1.2 U será compacto y por lo cual, cerrado, lo mismo con U^c y se sigue entonces que U es clopen.
$2 \Rightarrow 3$) Consideremos U y U^c compacto por pares, veamos que (U, τ_1^U) es un espacio espectral, un argumento similar puede hacerse para U^c.
Puesto que U es compacto por pares, se sigue que U es cerrado para el espacio de Priestley $(X, \tau, \leq)$ y por lo cual, el espacio $(U, \tau^U, \leq)$ es un espacio de Priestley, y en consecuencia, por Teoremas 2.3 y 2.6 se tiene que (U, τ_1^U) es un espacio espectral. Por otro lado, consideremos $A \in \epsilon(X)$, es claro que $A \cap U \in \epsilon(U)$, de donde se tiene que U es un sub conjunto espectral.
$3 \Rightarrow 2$) Supongamos que (U, τ_1^U) es un espacio espectral, entonces $\{Y \cap U : Y \in \epsilon(X)\} \subseteq \epsilon(U)$. Sea ahora $A \in \epsilon(U)$, entonces, A es abierto en la topología relativa a U, es decir, existe $V \in \tau_1$ de manera tal que $A = V \cap U$, y puesto que V es abierto de τ_1, se sigue que $V = \bigcup\{Y_j : Y_j \in \epsilon(X)\}$. Dado que $A = V \cap U$, obtenemos que $A = U \cap \bigcup\{Y_j : Y_j \in \epsilon(X)\}$. Puesto que A es compacto, existen $Y_{j_1} \cdots Y_{j_k}$ de manera tal que $A = U \cap (Y_{j_1} \cup \cdots \cup Y_{j_k})$. Ya que $\epsilon(X)$ es cerrado bajo uniones finitas, se deduce que $A \in \{U \cap Y : Y \in \epsilon(X)\}$, se sigue entonces, la igualdad entre $\epsilon(U) = \{U \cap Y : Y \in \epsilon(X)\}$.

Consideremos entonces, la base $\Delta(U) = \{U - W : W \in \epsilon(U)\}$. Es claro que si τ_2^U es la topología generada por $\Delta(U, \tau_1^U)$ por Teorema 2.6, (U, τ_1^U, τ_2^U) es un espacio de Stone por pares, y por lo cual, U será compacto por pares.

□

Con el Lema anterior, daremos una caracterización muy útil de los espacios bi-topológicos de Esakia.

Teorema 5.6. *Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio de Stone por pares, son equivalentes:*

1 (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi-topológico de Esakia.

2 Para cada $A \in \beta_1$ $B \in \beta_2$ se tiene que $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Consideremos que (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi-topológico de Esakia, y sean $A \in \beta_1$ $B \in \beta_2$. Es claro que $A \in \delta_2$ y $B \in \delta_1$, y además, $A^c \in \delta_1$ y $B^c \in \delta_2$, de donde se sigue que A ,A^c , B B^c son cerrados en el espacio de Priestley asociado $(X, \tau, \leq)$. Por lo cual, $A \cap B$ y $(A \cap B)^c$ son clopen en $(X, \tau, \leq)$.
Por Lema 5.4, se sigue que $A \cap B$ es clopen por pares en (X, τ_1, τ_2), por hipótesis, $Cl_1(A \cap B)$ es clopen por pares y por tanto clopen en $(X, \tau, \leq)$. Recordemos que, por Teorema 2.1 en $(X, \tau, \leq)$ el orden es $\leq = \leq_1$, de donde se sigue que $Cl_1(A \cap B)$ es un conjunto decreciente en $(X, \tau, \leq)$ y por lo cual, $Cl_1(A \cap B) \in CpDo(X)$ y por Teorema 2.3, $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$.
$2 \Rightarrow 1$) Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio de Stone por pares, y supongamos que se verifica, para cada $A \in \beta_1$, $B \in \beta_2$ se tiene que $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$. Sea $A \in PC(X)$, veamos que $Cl_1(A) \in PC(X)$.
Puesto que $A \in PC(X)$ por Lema 5.4 $A \in Clop(X)$. Puesto que $ClUp(X) \cup ClDo(X)$ forman una sub-base para $(X, \tau, \leq)$ y $A \in Clop(X)$, y que A es compacto, existen $U_1 \cdots U_n \in CpUp(X)$ y $V_1 \cdots V_n \in ClDo(X)$ tal que

$$A = (U_1 \cap V_1) \cup \cdots \cap (U_n \cap V_n).$$

Luego, al tomar la clausura respecto de la topología τ_1 se tiene que

$$\begin{aligned} Cl_1(A) &= Cl_1((U_1 \cap V_1) \cup \cdots (U_n \cap V_n)) \\ &= Cl_1(U_1 \cap V_1) \cup \cdots \cup Cl_1(U_n \cap V_n). \end{aligned}$$

Pero, por hipótesis, para cada índice i, se tiene que $Cl_1(U_i \cap V_i) \in \beta_2$ de donde se sigue que $Cl_1(A) \in \beta_2$, por lo cual $Cl_1(A) \in Clop(X)$ y por el Lema 5.4 se tiene que $Cl_1(A) \in PC(X)$ por lo cual (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi- topológico de Esakia. □

Teorema 5.7. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley y sea (X, τ_1, τ_2) su espacio de Stone por pares asociado. Entonces $(X, \tau, \leq)$ es de Esakia, si y sólo si (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi-topológico de Esakia.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de Esakia, y consideremos $A \in PC(X)$. Por el Lema 5.4, se tiene que $A \in Clop(X)$, se sigue que $\downarrow (A) \in Clop(X)$, pero además, a partir del Lema 4.3, $\downarrow (A) = Cl_1(A)$ y entonces, $Cl_1(A) \in Clop(X)$ y de donde se tiene que $Cl_1(A) \in PC(X)$ y así, (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi-topológico de Esakia.
$\Leftarrow$) Un argumento similar, muestra la afirmación recíproca.

□

Recordemos que un p-morfismo es una aplicación $f : X \to Y$ entre dos conjunos ordenados, que preserva el orden y además para cada $x \in X$ $y \in Y$, si $f(x) \leq y$ entonces, existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $f(z) = y$.

Definición 5.13. *Sean (X, τ_1, τ_2) y (X', τ'_1, τ'_2) dos espacios bi-topológicos de Esakia, y sea $f : X \to X'$, una aplicación, diremos que f es un morfismo bi-topológico de Esakia si f es bi-continua y además $f(Cl_2(x)) = Cl'_2(f(x))$.*

Teorema 5.8. *Sean $(X, \tau, \leq)$ y $(X', \tau', \leq')$ dos espacios de Esakia, y sean (X, τ_1, τ_2) y (X', τ'_1, τ'_2) sus espacios bi-topológicos de Esakia asociados. Entonces, $f : X \to X'$ es un morfismo de Esakia si y sólo si, f es un morfismo bi-topológico de Esakia.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que f es un morfismo de Esakia, es claro que f es bi-continua, y además, a partir del Lema 4.3 , se tiene que $Cl_2(x) = \uparrow(x)$, de donde se sigue que

$$\begin{aligned} f(Cl_2(x)) &= f(\uparrow(x)) \\ &= \uparrow(f(x)) \\ &= Cl_2'(f(x)) \end{aligned}$$

Y por lo tanto, f es un morfismo bi-topológico de Esakia.
$\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que f es un morfismo bi-topológico de Esakia, es claro entonces que f es continua, y además, por lo establecido anteriormente, f es un p-morfismo y por lo tanto un morfismo de Esakia.

□

Definición 5.14. *Definimos entonces **BEsa** a la categoría de los espacios bi-topológicos de Esakia cuyos morfismos son los morfismos bi-topológicos de Esakia.*

Corolario 5.1. *La categoría de los espacios de Esakia **Esa** es isomorfa a la categoría de los espacios Bi-topológicos de Esakia **BEsa***

Demostración. Notemos que, **Esa** $\subseteq$ **Pries** y que **BEsa** $\subseteq$ **PStone**, bastará con la restricción de los funtores establecidos en el Teorema 2.5. □

5.4. Espacios Bi- topológicos de Esakia y espacios espectrales de Esakia

La presente sección tiene como obejtivo definir lo que entenderemos como espacios topológicos espectrales de Esakia, y mostraremos a continuación que las categorias **BEsa** y **ESpec** son isomorfas y como resultado de las secciones 2, 3 y 4 del presente capítulo, obtendremos una descripción de las álgebras de Heyting en función de los espacios de Priestley, Stone por pares y espectrales, respectivamente.

Definición 5.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico espectral, diremos que un sub-conjunto $A \subseteq X$ es un conjunto doblemente espectral si A y A^c son sub-conjuntos espectrales.*
Indicaremos $DS(X)$ al conjunto de todos los sub-conjuntos doblemente espectrales.

Definición 5.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico espectral, diremos que es un espacio espectral de Esakia si $A \in DS(X)$ entonces $Cl(A) \in DS(X)$.*

Definición 5.17. *Sean (X, τ) y (X', τ') dos espacios espectrales de Esakia, diremos que una aplicación es un morfismo espectral de Esakia, si f es espectral y además $f(Sat(x)) = Sat(f(x))$.*

Definición 5.18. *Definimos entonces **ESpec** a la categoría de los espacios espectrales de Esakia, cuyos morfismos son los morfismo espectrales de Esakia.*

Consideremos (X, τ_1, τ_2) un espacio de Stone por pares, y sea (X, τ_1) su espacio espectral asociado, a partir del Lema 5.4 es natural, el siguiente resultado.

Teorema 5.9. *Sean (X, τ_1, τ_2) un espacio de Stone por pares y sea (X, τ_1) su espacio espectral asociado, entonces, (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi- topológico de Esakia si y sólo sí (X, τ_1) es un espacio espectral de Esakia.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que (X, τ_1, τ_2) es un espacio bi- topológico de Esakia, y consideremos $A \in DS(X)$, se tiene entonces que, A y A^c son espectrales, lo que es equivalente, por Lema 5.4 que $A \in PC(X)$. Siendo (X, τ_1, τ_2) un espacio bi- topológico de Esakia, se tiene que

$Cl_1(A) = Cl(A) \in PC(X)$ y nuevamente por Lema 5.4 se sigue que $Cl(A) \in DS(X)$ y así, es un espacio espectral de Esakia.
$\Leftarrow$) Un arguemnto similar, muestra la afirmación recíproca. □

Teorema 5.10. *Sean (X, τ_1, τ_2) y (X', τ_1', τ_2') dos espacio bi- topológico de Esakia y sean (X, τ_1) y (X', τ_1') sus respectivos espacios espectrales de Esakia asociados. Entonces, $f : X \to X'$ es un morfismo bi- topológico de Esakia, si y sólo si f es un morfismo espectral de Esakia.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que f es un morfismo bi- topológico de Esakia. Ya hemos probado en el Teorema 2.7 que en efecto, f es una aplicación espectral.
Notemos que, $Sat_1(x) = Cl_2(x) = \uparrow (x)$ entonces, por Lema 5.3 se deduce que $f(Sat(x)) = Sat(f(x))$ y en consecuencia, es un morfismo espectral de Esakia.
$\Leftarrow$) Es análoga a la afirmación anterior. □

En vista de los resultados establecidos en esta sección obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 5.2. *La categoría de espacios bi- topológicos de Esakia **BEsa** es isomorfa a la categoría de espacios espectrales de Esakia **ESpec**.*

Corolario 5.3. *Sean las categorías **Hey**, **Esa**, **BEsa** y **ESpec**, entonces*

$$\textbf{\textit{Hey}} \simeq \textbf{\textit{Esa}} \simeq \textbf{\textit{BEsa}} \simeq \textbf{\textit{ESpec}}.$$

5.5. Dualidad de Conceptos algebraicos

En el desarrollo de esta sección describiremos los conceptos algebraicos desarrollados en función de los espacios de Esakia, Bi-topológicos de Esakia y Espectrales de Esakia respectivamente, para las álgebras de Heyting.
Notemos que la dualidad dada para las álgebras de Heyting son simplemente un caso particular de la dualidad establecida, para retículos distributivos, tanto como para los espacios de Priestley como para los espacios de Stone por pares y los espectracles, por lo cual, la dualidad de los conceptos algebraicos hechos en función de argumentos puramente topológicos, no cambia en lo absoluto. En consecuencia, la descripción dual de filtros, filtros primos, filtros maximales, ideales, ideales primos e ideales maximales es exactamente la misma.
Nos enfocaremos entonces, a la tarea de describir las sub-álgebras de Heyting en función de los espacios de Esakia, Bi- topológicos de Esakia, y espectrales de Esakia, respectivamente.

Definición 5.19. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y sea Q, un quasi-orden de Priestley definido sobre X. Definimos la relación de equivalencia $E \subseteq X \times X$ como*

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (x, y) \in Q \text{ y además } (x, y) \in Q.$$

Definición 5.20. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley, y Q un quasi-orden de Priestley definido sobre X. Diremos que Q es un quasi-orden de Esakia si para cada $x, y \in X$ con $(x, y) \in Q$ existe un $z \in X$ con $x \leq z$ y $(z, y) \in E$. En otras palabras, Q resulta de la composición de las relaciones $\leq$ y E, respectivamente.*

Así como hemos mostrado en la sección 4 del capítulo 4, se establece un isomorfismo para el poset $(S_L, \subseteq)$ con el poset $(Q_X, \subseteq)$.Definimos entonces, para un álgebra de Heyting A, el isomorfismo entre los poset $(HS_A, \subseteq)$ y $(EQ_X, \subseteq)$ en donde HS_A indicará el conjunto de todas las subálgebras de Heyting del álgebra A, y EQ_X indicará el conjunto de todos los quasi órdenes de Esakia definidos sobre el espacio topológico de Esakia asociado a A.

Teorema 5.11. *Sea A un álgebra de Heyting, y sea $(X(A), \tau, \subseteq)$ su espacio de Esakia asociado. Entonces*

$$(HS_A, \subseteq) \simeq (EQ_X, \subseteq).$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$Q : HS_A \to EQ_X.$$

$$S \to Q_S.$$

Definido como sigue, para cada $P, Q \in X(A)$

$$(P, Q) \in Q_S \Leftrightarrow P \cap S \subseteq Q \cap S.$$

Por otro lado, definimos la aplicación

$$S : EQ_X \to HS_A.$$

$$Q \to S_Q.$$

Donde, $S_Q = \{a \in A : \phi_+(a)$ es Q creciente $\}$.
Ya hemos probado en el Teorema 4.6, que establecen un isomorfismo entre los quasi-ordenes de Priestley y los sub-retículos distributivos.
Será suficiente probar que Q_S es un quasi-orden de Esakia y que S_Q es una sub-álgebra de Heyting.
Supongamos que $(F_1, F_2) \in Q_S$ veamos que, existe un $Z \in X(A)$ tal que $F_1 \subseteq Z$ y $(Z, F_2) \in E_S$.
Puesto que $(F_1, F_2) \in Q_S$, por definición $F_1 \cap S \subseteq F_2 \cap S$. Consideremos el filtro $F =< F_1 \cup (F_2 \cap S) >_f$, es fácil comprobar que $F_1 \subseteq F$ y además $F \cap S = F_2 \cap S$, es decir $(F, F_2) \in E_S$.
Consideremos además el ideal $I =\downarrow (F_2^c \cap S)$, y notemos que $F \cap I = \emptyset$, puesto que en caso contrario, existe $f_1 \in F_1$ y $f_2 \in F_2 \cap S$, de manera tal que $f_1 \wedge f_2 \leq z$ para algún $z \in F_2^c \cap S$. De donde se sigue que $f_2 \leq f_1 \to z$ y por lo tanto, $z \in F_2$ lo que resulta imposible. Luego, por 3.2 existe $Z \in X(A)$ de manera tal que $F_1 \subseteq Z$ y $(F_2, Z) \in E_S$.
Por otro lado, sea Q un quasi-orden de Esakia, veamos que S_Q es una sub-álgebra de Heyting.
Bastará probar entonces, que

$$\begin{aligned} \phi_+(a \to b) &= \phi_+(a) \Rightarrow \phi_+(b) \\ &= [\downarrow (\phi_+(a) - \phi_+(b))]^c \\ &= \{P \in X(A) : \uparrow (P) \cap \phi_+(a) \subseteq \phi_+(b)\} \end{aligned}$$

es un conjunto Q creciente.
Consideremos $F_1 \in \phi_+(a) \Rightarrow \phi_+(b)$ y sea F_2 tal que $(F_1, F_2) \in Q$, veamos que $F_2 \in \phi_+(a) \Rightarrow \phi_+(b)$.
Consideremos $R \in \uparrow (F_2) \cap \phi_+(a)$, entonces, $F_2 \subseteq R$ y además $R \in \phi_+(a)$. Dado que $(F_1, F_2) \in Q$ y además $F_2 \subseteq R$ se sigue que $(F_1, R) \in Q$.
Puesto que Q es un quasi-orden de Esakia, existe un $Z \in X(A)$ tal que $F_1 \subseteq Z$ y $(Z, R) \in E$.
Puesto que $(Z, R) \in E$, $R \in \phi_+(a)$ y que $\phi_+(a)$ es Q- creciente, se tiene que $Z \in \phi_+(a)$, por lo cual, $Z \in \uparrow (F_1) \cap \phi_+(a)$. Puesto que $\uparrow (F_1) \cap \phi_+(a) \subseteq \phi_+(b)$ entonces, $Z \in \phi_+(b)$ y por lo cual $R \in \phi_+(b)$, de donde se sigue que $F_2 \in \phi_+(a) \Rightarrow \phi_+(b)$ y por lo tanto $\phi_+(a) \Rightarrow \phi_+(b)$ es Q-creciente. En consecuencia, hemos mostrado que $(HS_A, \subseteq) \simeq (EQ_X, \subseteq)$. □

Daremos ahora, la descripción dual de las sub-álgebras de Heyting en función de los espacios bi-topológicos de Esakia.
Recordemos que, un espacio bi-topológico de Esakia es un espacio de Stone por pares (X, τ_1, τ_2) que verifica además que, si $U \in PC(X)$ entonces $Cl_1(U) \in PC(X)$ ó, de manera equivalente, para cada $A \in \beta_1$, $B \in \beta_2$, se tiene que $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$.

Definición 5.21. *Sea X un conjunto no vacío. Una bi-topología de Esakia definida sobre X es una bi-topología (τ_1, τ_2) cero dimensional por pares y además si $A \in \beta_1$ y $B \in \beta_2$ entonces $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$.*

Usaremos $(EB_X, \subseteq)$ para indicar el conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, de las bi-topologías de Esakia definidas sobre X.

Teorema 5.12. *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio toplógico de Esakia, y sea (X, τ_1, τ_2) su correspondiente espacio bi-topológico de Eakia. Entonces el poset*

$$(EQ_X, \subseteq) \simeq (EB_X, \subseteq).$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$Z : EQ_X \to BE(X).$$

$$Q \to (\tau_1^Q, \tau_2^Q).$$

Donde τ_1^Q es la topología de los abiertos Q-crecientes y τ_2 es la topología de los abiertos Q-decrecientes.
Por otro lado, definimos la aplicación

$$Q : EB_X \to EQ_X.$$

$$(\tau_1', \tau_2') \to Q_{(\tau_1', \tau_2')}.$$

Donde $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$ es el orden de especialización de τ_1'.
Por el Teorema 4.7 bastará probar que para un quasi-orden de Esakia Q, (τ_1^Q, τ_2^Q) es una bi-topología de Esakia, y para (τ_1, τ_2) bi-topología de Esakia, Q_{τ_1} es un quasi-orden de Esakia.
Sea Q un quasi-orden de Esakia, y consideremos $A \in \beta_1^Q$ y $B \in \beta_2^Q$. Puesto que (τ_1^Q, τ_2^Q) es cero dimensional por pares, se sigue que A es clopen Q creciente, y B es clopen Q decreciente, de donde además B^c es clopen Q-creciente. Consideremos el retículo de los clopen Q-crecientes, por Teorema 5.11, es un álgebra de Heyting, de donde se sigue que $A \to B^c = (\downarrow (A \cap B))^c$ es clopen Q-creciente, y por lo tanto, $\downarrow (A \cap B)$ es clopen Q-decreciente. Dado que $\downarrow (A \cap B) = Cl_1(A \cap B)$ se sigue entonces que $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$ como queríamos mostrar.

Por otro lado, supongamos que $(\tau_1', \tau_2') \in EB_X$, mostraremos que $Q_{(\tau_1', \tau_2')} \in EQ_X$.
Para esto, haremos uso del Teorema 5.11, y mostraremos que el retículo dado por los clopen $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$-crecientes, es cerrado bajo la implicación, y por tanto, se tendrá que es un quasi-orden de Esakia.
Sean A, B dos clopen $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$-crecientes, entonces, $A \in \beta_1'$ y $B^c \in \beta_2'$, entonces, por ser (τ_1', τ_2') una bi-topología de Esakia, se tiene que $Cl_1(A \cap B^c) \in \beta_2'$, por lo cual $Cl_1(A \cap B^c)$ es $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$-decreciente. Puesto que $Cl_1(A \cap B^c) = \downarrow (A \cap B^c)$, clopen $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$- decreciente, se tiene que $(\downarrow (A \cap B^c))^c = A \to B$ es clopen $Q_{(\tau_1', \tau_2')}$- creciente, como queríamos probar.
Luego, se sigue que $(EQ_X, \subseteq) \simeq (EB_X, \subseteq)$. □

Por último, describiremos las sub-álgebras de Heyting en función de los espacios espectrales de Esakia.
Recordemos que un espacio espectral (X, τ) es espectral de Esakia, si $A \in DS(X)$ entonces $Cl(A) \in DS(X)$ donde, DS(X) indica el conjunto de los sub-conjuntos doblemente espectrales.

Definición 5.22. *Sea (X, τ) un espacio espectral de Esakia. Una topología más gruesa τ' definida sobre X, se dirá espectral de Esakia si es fuertemente coherente y además si $A \in \epsilon(X, \tau')$ y $B \in \Delta(X, \tau')$ entonces $Cl(A \cap B) \in \Delta(X, \tau')$.*
Indicaremos como SE_X al conjunto de todas las topologías espectrales de Esakia.

Observación 5.2. *No debe hacerse confusión en la terminología, un espacio espectral de Esakia es un par (X, τ) que verifica:*

- *(X,τ) es espectral.*
- *Si $A \in DS(X)$ entonces $Cl(A) \in DS(X)$.*

Por otro lado, dado un espacio espectral de Esakia, una topológia τ', necesariamente más gruesa que τ, es espectral de Esakia si es fuertemente coherente (i.e $U \in \tau' \cap \sigma'$ si y solo si $U \in \tau' \cap \sigma$) y además verifica $U \in \epsilon(X,\tau')$ $V \in \Delta(X,\tau')$ entonces $Cl(U \cap V) \in \Delta(X,\tau')$.

Teorema 5.13. *Sea (X,τ_1,τ_2) un espacio bi-topológico de Esakia y sea (X,τ_1) su espacio espectral de Esakia asociado, entonces*

$$(EB_X, \subseteq) \simeq (SE_X, \subseteq).$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\Lambda : EB_X \to SE_X.$$

$$(\tau_1', \tau_2') \to \tau_1'.$$

Como ya sabemos, es fuertemente coherente y más gruesa que τ_1. Veamos que, en efecto, es una topología espectral de Esakia.
Sea $U \in \epsilon(X,\tau')$ y $V \in \Delta(X,\tau')$, se sigue entonces que $U \in \beta_1'$ y $V \in \beta_2'$. Dado que (τ_1', τ_2') es una bi-topología de Esakia, se sigue que $Cl_1(U \cap V) \in \beta_2'$ y por lo cual, $Cl(U \cap V) \in \Delta(X,\tau')$, y en efecto, es una topología espectral de Esakia.

Por otro lado, consideremos la aplicación

$$\Psi : SE_X \to EB_X.$$

$$\tau' \to (\tau_1', \tau_2').$$

Donde $\tau_1' = \tau'$ y τ_2' es la topología generada por $\Delta(X,\tau') = \{U^c : U \in \epsilon(X,\tau')\}$.
Como ya hemos demostrado, (τ_1', τ_2') es cero dimensional por pares, veamos que, en efecto, es bi-topología de Esakia.
Sea $A \in \beta_1'$ y $B \in \beta_2'$, entonces, $A \in \epsilon(X,\tau')$ y $B \in \Delta(X,\tau')$. Por hipótesis τ' una topología espectral de Esakia, se tiene que $Cl_1(A \cap B) = Cl(A \cap B) \in \Delta(X,\tau') = \beta_2'$, entonces, es bi-topología de Esakia. Del Teorema 4.8, se sigue que son isomorfos.

□

Corolario 5.4. *Sean A álgebra de Heyting, $(X,\tau,\leq)$, (X,τ_1,τ_2) y (X,τ_1) sus espacios de Esakia, bi-topológicos de Esakia, y espectral de Esakia asociados respectivamente. Entonces*

$$(HS_A, \subseteq) \simeq (EQ_X, \subseteq) \simeq (EB_X, \subseteq) \simeq (SE_X, \subseteq).$$

Demostración. Se sigue de los Teoremas 5.11, 5.12 y 5.13. □

En el siguiente diagrama establecemos un resumen del capítulo

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{DLat} & \longleftrightarrow & \mathbf{Pries} & \longleftrightarrow & \mathbf{PStone} & \longleftrightarrow & \mathbf{Spec} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Hey} = \mathbf{DLat} + \Rightarrow & \longleftrightarrow & \mathbf{Esa} = \mathbf{Pries} + C_1 & \longleftrightarrow & \mathbf{BEsa} = \mathbf{PStone} + C_2 & \longleftrightarrow & \mathbf{ESpec} = \mathbf{Spec} + C_3
\end{array}$$

Donde C_1 , C_2 y C_3 son las siguientes condiciones

- C_1- Para cada $A \in Clop(X)$ tenemos $\downarrow(A) \in Clop(A)$.

- C_2- Para cada $A \in PC(X)$ tenemos que $Cl_1(A) \in PC(X)$. O de manera equivalente, si $A \in \beta_1$ y $B \in \beta_2$ entonces $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$.
- C_3- Para cada $A \in DS(X)$ tenemos que $Cl(A) \in DS(X)$.

Además. hemos probado que todas son condiciones equivalentes. Por otro lado, en la siguiente tabla, ofrecemos un resumen de la dualidad establecida para los conceptos algebraicos de interés.

Dualidad de objetos algebraicos para álgebras de Heyting

Hey	**Esa**	**BEsa**	**ESpec**
Filtro	ClUp	τ_2 cerrados	KS(X)
Filtro Primo	$\uparrow(Q)$	$Cl_2(Q)$	$Sat_1(Q)$
Filtro Max	$\{Q\}$	$Cl_2(Q) = \{Q\}$	$Sat_1(Q) = \{Q\}$
Ideal	OpUp(X)	τ_1 abiertos	τ_1 abiertos
Ideal Primo	$(\downarrow(Q))^c$	$(Cl_2(Q))^c$	$(Sat_1(Q))^c$
Ideal Max	$\{Q\}^c$	$(Cl_2(Q))^c = \{Q\}^c$	$(Sat_1(Q))^c = \{Q\}^c$
$(HS_X, \subseteq)$	$(EQ_X, \subseteq)$	$(EB_X, \subseteq)$	$(SE_X, \subseteq)$

Capítulo 6

Caso particular, Algebras de Boole

En el presente capítulo, trabajaremos sobre la categoría de las algebras de Boole y mostraremos que todas las dualidades topológicas que hemos desarrollado a lo largo de este trabajo, colapsan en una sola topología.

Definición 6.1. *Sea L un retículo, y $a \in L$ diremos que a tiene complemento si existe un elemento $b \in L$ de manera tal que*

$$a \vee b = 1 \qquad a \wedge b = 0$$

Indicaremos $B(L) = \{a \in L : a \text{ es complementado}\}$

Lema 6.1. *Sea L un retículo distributivo acotado, entonces el complemento de un elemento es único.*

Demostración. Supongamos que a es complementado tanto por b como por c. Se tiene entonces que

$$c = c \wedge 1 = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = c \wedge b$$

por lo tanto, se tiene que $c \leq b$.
Por otro lado se observa que

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = b \wedge c$$

por lo tanto, se obtiene que $b \leq c$ y así, b=c. □

Definición 6.2. *Sea L un retículo distributivo, diremos que L es un retículo booleano (RB) si*

$$B(L) = L$$

es decir, todo elemento tiene complemento.

Definimos la función uno-aria

$$^c : L \to L$$

$$a \to a^c$$

y hacemos entonces, la siguiente definición algebraica de las algebras de Boole.

Definición 6.3. *Una álgebra de Boole, es un álgebra $< L, \wedge > \vee, ^c, 1, 0 >$ de tipo (2,2,1,0,0) donde L es un retículo distributivo y cada elemento tiene un único complemento*

Lema 6.2. *Sea B un algebra de boole, entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

- $(a^c)^c = a$
- $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$

- $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$
- *si* $a \leq b$ *entonces* $b^c \leq a^c$
- $a \wedge b = 0$ *si y sólo si* $a \leq b^c$ *si y sólo si* $a^c \vee b^c = 1$

Definición 6.4. *Sean* B_1, B_2 *dos álgebras de Boole, definimos un homeomorfismo de álgebras de Boole a una aplicación*

$$h : B_1 \to B_2$$

tal que verifica

- *h es un homeomorfismo de retículos distributivos*
- $h(a^c) = h(a)^c$

Definición 6.5. *Definimos entonces **Boole** a la categoría cuyos elementos son álgebras de Boole, y sus morfismos son los homomorfismos de álgebras de Boole.*
*Es inmediato notar que **Boole** $\subseteq$ **DLat**.*

6.1. Dualidad de Stone

Desarrollaremos a continuación la dualidad topológica establecida por M. Stone y mostraremos que es la única dualidad posible para estas álgebras.
Recordemos entonces algunos conceptos necesarios.

Definición 6.6. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico, diremos que es cero dimensional, si tiene como base a los clopen.*

Definición 6.7. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico, diremos que es de Stone si es compacto, Hausdorff y cero dimensional.*

Definición 6.8. *Sean* (X, τ) *y* (Y, τ') *espacios de Stone, y* $f : X \to Y$ *una función, diremos que* f *es un morfismo de espacios de Stone si* f *es continua.*

Definición 6.9. *Definimos entonces **Stone** a la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos de Stone y los morfismos son las funciones continuas.*
*Es sencillo verificar que **Stone** $\subseteq$ **Spec**.*

Consideremos sobre el conjunto de filtros primos de un álgebra de Boole B, la topología generada por la base $\beta_1 = \{\phi_+(a) : a \in L\}$, donde la aplicación

$$\phi_+ : B \to P(X(B))$$

$$a \to \phi_+(a) = \{P \in X(B) : a \in P\}$$

Lema 6.3. *Sea* $P \in X(B)$, *entonces* $a \in P \Leftrightarrow a^c \notin P$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $a \in P$ veamos que $a^c \notin P$. Por absurdo, supongamos que $a^c \in P$, entonces, $a \wedge a^c = 0 \in P$, de donde se sigue que P no es filtro propio, lo que es imposible.
$\Leftarrow$) Es análoga, considerando que P^c es un ideal primo. $\square$

Observación 6.1. *Notemos que, por la observación anterior, se obtiene que* $\phi_+(a)^c = \phi_+(a^c)$. *En efecto, sea* $P \in \phi_+(a^c)$, *entonces* $a^c \in P \Rightarrow a \notin P$ *de donde se sigue que* $a \in \phi_+(a)^c$.
Por otro lado, si $P \in \phi_+(a)^c$ *se sigue entonces que* $a \notin P \Rightarrow a^c \in P$ *de donde* $P \in \phi_+(a^c)$.

Teorema 6.1. *Sea* B *un álgebra de boole, y consideremos sobre el conjunto de los filtros primos* $X(B)$, τ *la topología generada por la base* $\beta_1 = \{\phi_+(a) : a \in L\}$. *Entonces* $(X(B), \tau)$ *es un espacio de Stone.*

Demostración. Notemos que, por el Teorema (4.9), $(X(B), \tau)$ es un espacio espectral, y por lo tanto, se tiene que $(X(B), \tau)$ es compacto y cero dimensional. Por otro lado, sean $P, Q \in X(B)$ con $P \neq Q$. Podemos suponer que $P \nsubseteq Q$, entonces, existe $a \in P - Q$, y por lo cual, $P \in \phi_+(a)$ y $Q \in \phi_+(a)^c$. En vista de la observación (7.1) se sigue que $(X(B), \tau)$ es un espacio Hausdorff y por lo tanto, un espacio de Stone. □

Teorema 6.2. *Sean B y B' álgebras de boole y sea $h : B \to B'$ un homomorfismo de álgebras de Boole, entonces la aplicación*

$$f_h : X(B') \to X(B).$$

$$P \to h^{-1}(P).$$

es un morfismo de espacios de Stone.

Demostración. Es análoga al Teorema (4.10) □

Definición 6.10. *Sean **Boole** y **Stone**, definimos el funtor*

$$\alpha : \textbf{\textit{Boole}} \to \textbf{\textit{Stone}}.$$

$$B \to (X(B), \tau).$$

Además, para un morfismo de álgebras de boole $h : B \to B'$, se tiene que $\alpha(h) = f_h = h^{-1}$ es un morfismo de espacios de Stone.

Notemos que hemos utilizado el mismo funtor que en la dualidad espectral, esto se debe a que estamos restringiendo dicho funtor a las sub-categorías **Boole** y **Stone** respectivamente.

Teorema 6.3. *Sea (X, τ) un espacio de Stone, entonces $< Clop(X), \cap, \cup, ^c >$ es un álgebra de Boole.*

Demostración. Es inmediato. □

Teorema 6.4. *Sean (X, τ) y (X', τ') dos espacios de Stone, y sea $f : X \to X'$ un morfismo de espacios de Stone, entonces la aplicación*

$$h_f : Clop(X') \to Clop(X).$$

$$U \to f^{-1}(U).$$

Es un homomorfismo de álgebras de Boole.

Demostración. En vista del Teorema (4.12), bastará probar que $h_f(U^c) = (h_f(U))^c$.
Notemos que $h_f(U^c) = f^{-1}(U^c) = (f^{-1}(U))^c = (h_f(U))^c$, como queríamos demostrar. □

Definición 6.11. *Sean las categorias **Stone** y **Boole**, definimos el funtor*

$$\theta : \textbf{\textit{Stone}} \to \textbf{\textit{Boole}}.$$

$$(X, \tau) \to Clop(X).$$

Además para $f : X \to X'$ un morfismo de espacios de Stone, definimos $\theta(f) = h_f$ es un morfismo de álgebras de Boole.

Teorema 6.5. *Las categorías **Boole** y **Stone** son dualmente equivalentes.*

Demostración. La prueba es inmediata considerando el Teorema (4.13) y la restricción de ambos funtores a las sub-categorías correspondientes. □

Observación 6.2. *Por último, notemos que en virtud del Lema (7.3) y la observación (7.1), se obtiene que*

$$\phi_+(a)^c = \phi_+(a^c) = \phi_-(a).$$

Por lo tanto, la sub-base

$$s = \{\phi_+(a) : a \in B\} \cup \{\phi_-(a) : a \in B\}$$

Deviene en la misma base obtenida para la dualidad de Stone, ya que todo elemento en un álgebra de Boole tiene complemento.
Se deduce entonces, que tanto la equivalencia dual que establecemos con Priestley como la que establecemos con los espacios de Stone por pares, son la todas iguales que la de Stone cuando nos restringimos a la sub-categoría de las álgebras de Boole.

Bibliografía

[1] Balbes R. and Dwinger P.: *Distributive Lattices.* University of Missouri Press (1974).

[2] Bezhanisvili G. Bezhanishvili N. Gavelaia D. y Kurz A. *Bitopological duality for distributive lattices and Heyting algebras*, Cambidge University press, 2010.

[3] Cignoli, R., Lafalce, S. and Petrovich, A. *Remarks on Priestley duality for distributive lattices.* Order 8 (3) 299–315. 1991.

[4] Cornish, W. H. *On H. Priestley's dual of the category of bounded distributive lattices. Mat. Vesnik 12 (27) (4) 329–332.* (1975).

[5] Dvanishvili, B.P. *Bitopological Spaces : Theory, relation with generalized algebraic structures, and applications*, Elsevier, (2005).

[6] Esakia, L.L. *Topological Kripke models. Soviet Math. Dokl. 15 147–151.*,(1974).

[7] Esakia, L.L. *The problem of dualism in the intuitionistic logic and Browerian lattices. In: V Inter. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science 7–8* , (1975).

[8] Esakia, L.L. *Heyting Algebras I. Duality Theory (in Russian), 'Metsniereba', Tbilisi* , (1985).

[9] Harding, J. and Bezhanishvili, G. *MacNeille completions of Heyting algebras. Houston Journal of Mathematics 30 937–952.* (2004)

[10] Jung, A. and Moshier, M. A. *On the bitopological nature of Stone duality. Technical Report* CSR-06-13, School of Computer Science, University of Birmingham, (2006).

[11] Kelly, J.C. *Bitopological spaces.* Proc. London Math. Soc. s3-13 71–89. (1963)

[12] Priestley, H. A. *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces.* Bull. London Math. Soc. 2 186–190. (1970)

[13] Priestley, H. A. *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices.* Proc. London Math. Soc. s3-24 507–530. (1972)

[14] Priestley, H. A. *Ordered sets and duality for distributive lattices. In: Orders: description and roles* . North-Holland Math. Stud. 99 39–60. (1984).

[15] R. Balbes and P.Dwinger, *Distributive Lattices* University of Missouri Press, Columbia, MO, 1974.

[16] Reilly, I.L. *Zero dimensional bitopological spaces.* Indag. Math. 35 127–131. (1973).

[17] Salbany, S. *Bitopological spaces, compactifications and completions.* Mathematical Monographs of the University of Cape Town 1. (1974).

[18] Salbany, S. *A bitopological view of topology and order.* Pure Math. 5 481–504. (1984).

[19] Schmid, J. *Quasiorders and sublattices of distributive lattices.* Order 19 (1) 11–34. (2002).

[20] Stone, M. *Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics.* Casopis Pest. Mat. Fys. 67 1–25. (1937).