# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

*Tesis Doctor en Ciencias Matemáticas*

# Multiplicadores y derivaciones en álgebras de operadores

Ana Paula Madrid

BAHIA BLANCA ARGENTINA

2013

# Índice general

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .../.../..., mereciendo la calificación de ...(................)

# Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicada, dependiente de la Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA, durante el período comprendido entre el 18 de marzo de 2008 y el 2 de septiembre de 2013, bajo la dirección del Dr. Carlos César Peña (Profesor Asociado con Dedicación Exclusiva del Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, categoría III del Programa de Incentivos a Docentes e Investigadores), con supervisor local Dr. Luis Amadeo Piovan (Profesor Titular del Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional del Sur, categoria III del Programa de Incentivos a Docentes e Investigadores).

# Agradecimientos

A mis padres, amigos y familiares.
A mis profesores.
A autoridades del CONICET, a la Universidad Nacional del Sur y a la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN.

Ana Paula Madrid

2 de septiembre de 2013

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

# Resumen: Objetivos y aportes originales

Hemos de considerar la estructura de multiplicadores y derivaciones en álgebras de operadores. En procura de que el trabajo no se diluya en especificaciones técnicas tratamos en todo caso de situarlo en el contexto general de la teoría de derivaciones en álgebras de Banach. Por ello se citará frecuentemente [33], trabajo que adjuntamos a esta tesis, en el Anexo I. Asimismo, en varias de las secciones de este documento daré los elementos mínimos que permítan al lector una mejor comprensión de los temas abordados.

El trabajo está dividido en cuatro capítulos principales, a saber: el Capítulo 1 de carácter introductorio, el Capítulo 2 acerca derivaciones en álgebras nucleares, el Capítulo 3 acerca de $\mathcal{B}$-derivaciones, y el Capítulo 4 sobre $(\sigma, \tau)$-derivaciones.

Los resultados principales del Capítulo 2, publicados en [34], están en la Sección 2.6. La entidad de este estudio reside en el Teorema 2.5.2, que precisa condiciones fuertemente restrictivas de amenabilidad o super-amenabilidad de álgebras nucleares construídas sobre pares duales de espacios de Banach. Estudiamos entonces la estructura de las derivaciones de tipo Hadamard cuyos resultados principales son Lema 2.6.10, Prop. 2.6.11, Prop. 2.6.12, Prop. 2.6.14, Prop. 2.6.15 y Teo. 2.6.13.

Los resultados principales del Capítulo 3, publicados en [36], los tenemos en las Secciones 3.2 y 3.3. Consideramos un teorema de estructura y y la descripción exhaustiva de $\mathcal{B}$-derivaciones sobre $l^1(\mathbb{N})$ en la forma de los teoremas 3.2.1, 3.3.1 y el Corolario 3.3.2.

En el Capítulo 4 consideraré dos problemas enunciados por M. Mirzavaziri (cf. [38], 2009) acerca de estructura de $(\sigma, \tau)$-derivaciones. La investigación, de carácter algebraica, pudo hacerse en un marco elemental finito-dimensional. Los resultados principales, publicados en [35], los tenemos en los teoremas 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.5.

# Abstract: The matter and our main contributions


We consider the structure of multipliers and derivations in operator algebras. In order to avoid a lot of technical specifications and for the sake of clearness we try to put our matter in the general framework of the theory of derivations on Banach algebras. So, I added my undergraduated thesis [33], in the Appendix I, where various aspects of the theory are treated more exhaustively.

The work is divided into four main chapters; the Chapter 1 by way of introduction, the Chapter 2 about derivations in nuclear algebras, the Chapter 3 about $\mathcal{B}$-derivations and the Chapter 4 about $(\sigma, \tau)$-derivations.

The main results of Chapter 2, published in [34], are in Section 2.6. The importance of this study lies in Theorem 2.5.2, that requires highly restrictive conditions of amenabilithy or super-amenabilithy of nuclear algebras built on dual pairs of Banach spaces. Then studied the structure of derivations type Hadamard (Lemma 2.6.10, Prop. 2.6.11, Prop. 2.6.12, Prop. 2.6.14, Prop. 2.6.15 and Teo. 2.6.13).

The main results of Chapter 3, published in [36], we have them in Sections 3.2 and 3.3. We consider a structure theorem and the comprehensive description of $\mathcal{B}-$derivations on $l^1(\mathbb{N})$ in the form of Theorems 3.2.1, 3.3.1 and the Corollary 3.3.2.

In Chapter 4 solve two problems stated by M. Mirzavaziri (cf. [38], 2009) about the structure of $(\sigma, \tau)$-derivations. The research, algebraic in nature, could be done in a basic finite-dimensional framework. The main results, reported in [35], are in the Theorems 4.2.2, 4.2.3 and 4.2.5.

# Capítulo 1

# Marco general

Fijada un álgebra de Banach $\mathcal{U}$, que asumiremos en general compleja, hay variedad de recursos para desentrañar sus propiedades teóricas o con relación a su estructura intrínseca. Es razonable en principio considerar las clases de $\mathcal{U}$-módulos a izquierda, a derecha y bilaterales de Banach asociados. Precisamente, si $X$ fuere un $\mathcal{U}$ módulo de Banach a izquierda entonces $X$ es un espacio de Banach *per se* sobre el que hay definida una acción $\mathcal{U} \times X \to X$, $(a, x) \to a \cdot x$, que es $\mathbb{C}$-bilineal, $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ y $\|a \cdot x\| \leq \|a\| \|x\|$ cualesquiera sean $a, b \in \mathcal{U}$ y $x \in X$. Asimismo, todo $\mathcal{U}$-módulo de Banach a derecha no es otra cosa que un $\mathcal{U}^{op}$-módulo de Banach a izquierda, donde $\mathcal{U}^{op}$ denota el álgebra usual opuesta de $\mathcal{U}$. En este caso la condición $(a \cdot_{op} b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ válida $a, b \in \mathcal{U}$ y $x \in X$ requiere la identidad $(ba) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$, por lo cual indicaremos la acción a derecha de $\mathcal{U}$ sobre $X$ en la forma $(a, x) \to x \cdot a$, de modo que $x \cdot (ba) = (x \cdot b) \cdot a$. Si $X$ fuere un $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach entonces $X$ será $\mathcal{U}$-módulo de Banach tanto a derecha como a izquierda.

Dado un $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach $X$ una aplicación lineal $D : \mathcal{U} \to X$ es una derivación de bimódulos si verifica la denominada regla de Leibniz, i.e. para cada $a, b \in \mathcal{U}$ resulta $D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b$. Evidentemente si $X = \mathcal{U}$ tenemos la noción corriente de derivada, pero el enfoque más general se da naturalmente y es central para la *teoría cohomológica de álgebras de Banach*.

Hay ciertamente derivaciones no acotadas. P. ej., $\mathcal{U} = C^1[0, 1]$ es un álgebra de Banach con la estructura vectorial natural, el producto punto a punto y la norma $\|a\| = \|a\|_\infty + \|da/dt\|_\infty$ para cada $a \in \mathcal{U}$. De esta manera $X = (C[0, 1], \|\circ\|_\infty)$ es un $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach y la aplicación $D : \mathcal{U} \to X$ dada mediante $D(a) = da/dt$ para $a \in \mathcal{U}$ es una derivación no acotada. El estudio de derivaciones no acotadas se justifica no solo por un marcado interés propio, sinó también por aplicaciones relevantes a la Física, en particular en problemas dinámicos en Mecánica Estadística [51], [52].

Aún en el contexto general de un $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach $X$ es muy sencillo dar ejemplo de derivaciones: fijado $x \in X$ la aplicación $ad_x : \mathcal{U} \to X$ tal que $ad_x(a) = a \cdot x - x \cdot a$ para cada $a \in \mathcal{U}$ es una derivación. A estas derivaciones cuya descripción es tan simple se las llama *derivaciones internas*, y suele indicarse $\mathcal{N}^1(\mathcal{U}, X)$ al conjunto de derivaciones internas de $\mathcal{U}$ con valores en $X$. Por ejemplo si $X$ fuere un espacio normado toda derivación $D : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(X)$ es necesariamente interna, donde $\mathcal{A}$ es cualquier clase corriente de operadores sobre $X$ (cf. [6] o Th. 9 en [25]). Evidentemente toda derivación interna $ad_x$ es acotada, siendo $\|ad_x\| \leq 2\|x\|$ para cada $x \in \mathcal{U}$. En algunos casos se puede dar alguna precisión adicional e importante. P. ej. si $\mathcal{U} = \mathcal{B}(X)$ es el álgebra de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert la norma de una derivación interna $ad_T$ dada por un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ es $\|ad_T\| = 2\,\mathrm{dist}\,(T, \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_X)$ [56]. Dicho resultado es válido si $X = (\mathbb{R}^n, \|\circ\|_\infty)$ o si $X$ es el espacio de Banach real de medidas signadas acotadas $\mu$ sobre un espacio compacto $\Omega$ tal que $\upsilon \in X$ toda vez que $\upsilon$ es medida absolutamente continua respecto a $\mu$. Sin embargo, el resultado es falso si $X = l^p$ o $X = L^p(0,1)$ con $p \in (1,\infty) - \{2\}$ [21]. Se llama *derivación externa* a toda derivación no interna. La estructura de estas suele ser compleja de describir. A veces no las hay y entonces toda derivación resulta interna. Situaciones así se dan en el contexto de $C^*$-álgebras no unitarias simples (i.e. sin ideales biláteros no triviales) [50]. Hay derivaciones externas en $C^*$-álgebras separables que poseen algún cociente primitivo no unitario [10].

En el contexto de álgebras $\mathcal{B}(X)$ de operadores acotados sobre espacios de Hilbert, la imposibilidad probada en 1947 de realizar al operador idéntico en la imagen de alguna derivación interna ha sido importante por sus connotaciones en Mecánica Cuántica: expresándose la constante de Plank en unidades apropiadas la ecuación de Heisenberg para ciertos operadores simétricos $P$ y $Q$ sobre $X$ adopta la forma $QP - PQ = (i/2)\,\mathrm{Id}_X$ [62], [64]. A raíz de ello el estudio de *commutadores*, i.e. operadores que están en la imagen de alguna derivación interna, así como propiedades relativas al rango de derivaciones, ha dado lugar a una intensa investigación. En la profusa literatura sobre este particular, nos limitamos a señalar [16], [17], [5] por su análisis sistemático de la estructura de commutadores y la enunciación y resolución de variedad de problemas en la materia. Para una revisión histórica se puede consultar [61]. En [63] se caracterizan las derivaciones internas cuyos rangos son densos en las topologías débil o ultradébil de operadores y se prueba que la clausura fuerte de cada derivación interna contiene a la clase de operadores compactos. En [1] se logra determinar la clase de elementos $a$ en una $C^*$-álgebra con unidad $e$ tales que $e \in \overline{\mathrm{Im}\,(ad_a)}$.

De estas consideraciones surgen de inmediato algunos primeros interrogantes relativos a condiciones bajo las cuales una derivación de bimódulos dada es o no continua, y en caso de serlo determinar si se trata de una derivación interna. La investigación sobre en qué medida dependen estas respuestas de la estructura algebraica o topológica de $\mathcal{U}$ o de condiciones de $X$ ha abierto sendos capítulos del Análisis Funcional en álgebras de Banach y de Teoría de Operadores. En particular, la cuestión relativa a la continuidad de operadores o derivaciones se enmarca en la teoría más general de Continuidad Automática [7]. Por ejemplo, es conocido que todo homomorfismo complejo sobre un álgebra de Banach es necesariamente continuo. Asimismo, cabe señalar que toda derivación de una $C^*$-álgebra en si misma es necesariamente continua [49].

El estudio de derivaciones en álgebras de Banach abelianas ha permitido resultados insoslayables. En 1955 se estableció que la imagen de toda derivación acotada en un álgebra de Banach abeliana está contenida en el *radical de Jacobson* de la misma, resultado extendido en 1988 a derivaciones no acotadas [55], [58]. En álgebras de Banach no abelianas esta problemática no está aún suficientemente comprendida (cf. [7], §5.2, p. 609-635). La noción de *radical* y la íntima conexión de esta con la *teoría de representaciones* se conjugan en esta teoría para dar información sobre el álgebra de Banach subyacente. Así en toda álgebra de Banach abeliana semisimple toda derivación es trivial. Se ha conjeturado que la afirmación recíproca es cierta, pero aún la afirmación más débil asegurando la existencia de derivaciones no triviales en álgebras de Banach radicales y abelianas es falsa [43].

Con la notación anterior sea $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, X)$ al conjunto de derivaciones acotadas de $\mathcal{U}$ en $X$. El cociente $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, X) = \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, X) / \mathcal{N}^1(\mathcal{U}, X)$ es *el primer espacio de cohomología de Hochschild de* $\mathcal{U}$ *con coeficientes en* $X$. Se trata del cociente del subespacio de Banach $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, X)$ de $\mathcal{B}(\mathcal{U}; X)$ por el subespacio vectorial (no necesariamente cerrado) $\mathcal{N}^1(\mathcal{U}, X)$ de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, X)$. Desde luego toda derivación de $\mathcal{U}$ con coeficientes en $X$ es interna si $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, X)$ es trivial. Los espacios de cohomología de primer orden asociados a un álgebra de Banach $\mathcal{U}$, así como espacios de cohomología de orden superior, poseen propiedades que, debidamente interpretadas, se corresponden con información intrínseca dependiente de la estructura teórica de $\mathcal{U}$.

Dado un $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach $X$ hay acciones naturales a izquierda y a derecha de $\mathcal{U}$ en $X^*$ si hacemos $\langle x, ax^* \rangle = \langle xa, x^* \rangle$ y $\langle x, x^*a \rangle = \langle ax, x^* \rangle$ para $a \in \mathcal{U}$, $x \in X$ y $x^* \in X^*$. Acciones de $\mathcal{U}$ en duales de orden superior de $X$ se definen análogamente. Así un álgebra de Banach se dice *amenable* si $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, X^*) = \{0\}$ cualquiera sea el $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach $X$. La investigación de álgebras amenables constituye un punto de partida importante en el estudio de derivaciones acotadas sobre álgebras de Banach. Por un lado, si $G$ es un grupo localmente compacto entonces $L^1(G)$ es amenable si y solo si hay sobre $G$ un *promedio invariante [22]*. Como siempre, $L^1(G)$ consiste del espacio de funciones complejas absolutamente integrables sobre $G$ respecto de la medida de Haar, munido de la estructura de álgebra de Banach provista por el producto de convolución. Por otra parte, denominamos promedio invariante a todo funcional $\mu \in L^\infty(G)^*$ tal que $\|\mu\| = \langle 1, \mu \rangle = 1$ y $\langle \delta_a * f, \mu \rangle = \langle f, \mu \rangle$ para todo $a \in G$ y $f \in L^\infty(G)$, con $(\delta_a * f)(b) = f(a^{-1}b)$ si $b \in G$ salvo algún subconjunto de medida de Haar nula. Más generalmente, la amenabilidad de un álgebra de Banach $\mathcal{U}$ es equivalente a la existencia de una *diagonal virtual* para $\mathcal{U}$, o bien a la existencia de una *diagonal aproximada* para $\mathcal{U}$ [23]. Estas construcciones se hacen en el contexto del producto tensorial proyectivo $\mathcal{U} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{U}$. Por diagonal virtual entendemos un funcional $M \in (\mathcal{U} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{U})^{**}$ tal que para todo $a \in \mathcal{U}$ es $aM = Ma$ y $a\pi^{**}(M) = \widehat{a}$, siendo $\pi(a \overset{\wedge}{\otimes} b) = ab$ si $a, b \in \mathcal{U}$ y $\langle a^*, \widehat{a} \rangle = \langle a, a^* \rangle$ si $a \in \mathcal{U}$ y $a^* \in \mathcal{U}^*$. Además, una red $\{m_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{U} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{U}$ es una diagonal aproximada para $\mathcal{U}$ si $\text{lím}_{i \in I}(am_i - m_i a) = 0$ y $\widehat{a} = \text{lím}_{i \in I} a\pi(m_i)$ para cada $a \in \mathcal{U}$. En particular, un álgebra de Banach se dice ***débilmente amenable*** si $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) = \{0\}$. P. ej. $L^1(G)$ cuando es grupo localmente compacto [24] o toda $C^*$-álgebra [14], [15] son débilmente amenables, mientras que las álgebras

$$\begin{aligned} A(\mathbb{D}) &= \left\{ f \in C\left(\overline{\mathbb{D}}\right) : f\mid_{\mathbb{D}} \text{ es analítica} \right\}, \\ H^\infty(\mathbb{D}) &= \left\{ f \in l^\infty(\mathbb{D}) : f \text{ es analítica} \right\}, \end{aligned}$$

o $C^{(n)}([0,1])$ con $n \in \mathbb{N}$ no lo son. La investigación de álgebras $\mathcal{U}$ de Banach 2-débilmente amenables, 3-débilmente amenables, etc. se ha dado naturalmente (i.e. cuando los espacios de cohomología $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{**})$, $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{***})$, etc. son triviales). Asimismo, un álgebra de Banach es *super-amenable* o *contráctil* si $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, X) = \{0\}$ cualquiera sea el $\mathcal{U}$-bimódulo $X$. En este caso se trata de álgebras necesariamente unitarias. P. ej. dados $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ el álgebra $\mathbb{M}_{n_1} \oplus ... \oplus \mathbb{M}_{n_k}$ es super-amenable, mientras que las *álgebras de Beurling*[1] $L^1(G, w)$ sobre un grupo localmente compacto $G$ son super-amenables si y solo si $G$ es finito (Cf. [37]. Th. 2.2).

[1]Si $G$ es grupo localmente compacto y $w : G \to \mathbb{R}_{>0}$ es una función continua y submultiplicativa, $L^1(G, w)$ consiste de las funciones medibles $f : G \to \mathbb{C}$ tales que $fw \in L^1(G)$ munido de la norma $\|f\|_{1,w} \triangleq \|fw\|_1$. La condición de submultiplicatividad de $w$ torna a $L^1(G, w)$ en un álgebra de Banach respecto del producto de convolución usual.

# Capítulo 2

# Derivaciones en álgebras nucleares

## 2.1. Operadores nucleares y la propiedad de aproximación I

El estudio de ciertas clases importantes de operadores acotados entre espacios de Banach tanto como de *propiedades de aproximación* con una fuerte connotación geométrica, algebraica y topológica, está relacionada con ciertos *productos tensoriales*. En particular, esto se aplica a la clase de *operadores nucleares*. Precisamente, sean dados $X$ y $Y$ dos espacios de Banach, que en general asumiremos complejos, y sea $\langle \circ, \circ \rangle : X \times Y \to \mathbb{C}$ una forma bilineal acotada (i.e. existe $c > 0$ tal que $|\langle x, y \rangle| \leq c \|x\| \|y\|$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$) y no degenerada (i.e. si $\langle x, \circ \rangle = 0_{Y^*}$ o $\langle \circ, y \rangle = 0_{X^*}$ entonces $x = 0_X$ o $y = 0_Y$ respectivamente). La terna $(X, Y, \langle \circ, \circ \rangle)$ realiza una dualidad entre los espacios $X$ y $Y$ e indicamos $\mathcal{N}_Y(X)$ al subespacio de $\mathcal{B}(X)$ de operadores $Y$-nucleares sobre $X$ del tipo $T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \odot y_n$, donde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de $X$ y $Y$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| < \infty$ y para $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ el operador acotado de rango finito $x_0 \odot y_0 \in \mathcal{F}(X)$ sobre $X$ se define como $(x_0 \odot y_0)(x) \triangleq \langle x, y_0 \rangle x_0$ en cada $x \in X$.[1] En particular, indicaremos $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}_{X^*}(X)$. Definimos ahora la *norma nuclear de* $T$ mediante

$$|T| \triangleq \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| : T(\circ) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \circ, y_n \rangle x_n \right\}.$$

Evidentemente $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{N}_Y(X)$ . Si bien el adjunto de un operador nuclear es nuclear la afirmación recíproca no es cierta (Cf. [46], §8.2.6). Es fácil de ver que $\mathcal{N}_Y(X)$ es un ideal de $\mathcal{B}(X)$ y que $|STU| \leq |\|S\| T| \|U\|$ si $S, U \in \mathcal{B}(X)$ y $T \in \mathcal{N}_Y(X)$ . En particular, $|x \odot y| = \|x\| \|y\|$ para cada $x \in X$ e $y \in Y$, siendo la norma nuclear la mayor norma posible con dicha propiedad.

[1] Notar que hay una inmersión natural $Y \hookrightarrow X^*$, $y \to \langle \circ, y \rangle$ . De todos modos dicha inclusión puede ser propia y abusamos en el uso de la notación $\odot$, aunque en el contexto adecuado no habrá lugar a confusión.

Respecto a las propiedades de aproximación, son de especial interés los espacios de Banach para los que alguna red de operadores de rango finito converge uniformemente sobre compactos al operador idéntico. Se dice de estos espacios que poseen la *propiedad de aproximación*. La importancia de esta noción estriba en una percepción muy natural, ya que así como la clase de funciones simples es en general densa en los espacios de Lebesgue clásicos cabe esperar un rol especial de la clase de operadores de rango finito en materia de densidad o aproximación en el contexto de espacios de operadores. Por ejemplo, espacios de Banach que tienen alguna *base*[2] tienen la propiedad de aproximación. Por otra parte, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ no tiene la propiedad de aproximación si $\mathcal{H}$ es espacio de Hilbert infinito-dimensional [57]. Los espacios de Banach con la propiedad de aproximación gozan de cierta propiedad hereditaria, ya que todo subespacio de Banach complementable también tendrá la propiedad de aproximación. De todos modos, la propiedad de aproximación no es hereditaria en general, p. ej. $c_0$ o $l^p$ para $p \in [1, \infty) - \{2\}$ contienen subespacios sin la propiedad de aproximación (V. [30], Th. 2.d.6 y [31], Th. 1.g.4). En particular, hay espacios reflexivos que carecen de la propiedad de aproximación.

Si $X$ e $Y$ son espacios de Banach indiquemos $\mathcal{B}_c(X;Y)$ al espacio $\mathcal{B}(X;Y)$ munido de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Dada una forma lineal $u$ sobre $\mathcal{B}(X;Y)$ tendremos $u \in \mathcal{B}_c(X;Y)^*$ si y solo si hay sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X$ e $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y^*$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n^*\| < \infty$ y $u(T) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(T(x_n))$ si $T \in \mathcal{B}(X;Y)$ (V. [9], Lemma 3, p. 239). Es en esta instancia en que el recurso de los productos tensoriales resulta apropiado para dar un marco algebraico, tanto para el estudio de operadores nucleares como de propiedades de aproximación.

## 2.2. Elementos sobre productos tensoriales

### 2.2.1. Productos tensoriales

Salvo excepción explícita, asumiremos en adelante que todos los espacios vectoriales son complejos. El producto tensorial de espacios vectoriales $X$ y $Y$ es un par $(X \otimes Y, \tau)$, constituído por un espacio vectorial $X \otimes Y$ y una aplicación bilineal

$$\tau : X \times Y \to X \otimes Y, \ (x, y) \to x \otimes y,$$

con la siguiente propiedad universal: Si $Z$ es espacio vectorial y $B : X \times Y \to Z$ es aplicación bilineal hay una única aplicación lineal $\widehat{B} : X \otimes Y \to Z$ tal que $\widehat{B} \circ \tau = B$.

[2] La noción natural de *base* en un espacio de Banach $X$ es la de base de Schauder, esto es una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $X$ de modo que para cada $x \in X$ hay una única sucesión de escalares complejos $\{x_n^*(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ ([29]; [3], p. 110). Se dice que $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la *sucesión de coeficientes funcionales lineales asociada* a la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es fácil ver entonces que $\{\sum_{n=1}^{m} x_n \odot x_n^*\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\lim_{m \to \infty} \sup_{x \in K} \|x - (\sum_{n=1}^{m} x_n \odot x_n^*)(x)\| = 0$ para cada subconjunto compacto $K$ de $X$.

Tal producto tensorial existe y es único salvo isomorfismos (Cf. [29]; [33], Teo. 2.4, p. 7). Los elementos de $X \otimes Y$ pueden representarse como sumas finitas de elementos simples de la forma $x \otimes y$ o tensores básicos. Por otra parte, si $c \in \mathbb{C}$, $x \in X$ e $y \in Y$ se tiene

$$c\,(x \otimes y) = (cx) \otimes y = x \otimes (cy)\,.$$

En particular,

$$0_X \otimes y = x \otimes 0_Y = 0_{X \otimes Y}.$$

**Ejemplo 2.2.1.** Sean $X, Y$ espacios normados, $T \in \mathcal{F}\,(X;Y)$. Si $\dim T(X) = n$ sea $\{y_1, ..., y_n\}$ base de $T(X)$. Si $y \in T(X)$ existen $c_1\,(y)\,, ..., c_n\,(y) \in \mathbb{C}$ únicos tales que $y = \sum_{j=1}^{n} c_j\,(y)\,y_j$. Es fácil ver que las aplicaciones $c_j : Y \to \mathbb{C}$ devienen lineales si $1 \leq j \leq n$. Si hacemos $|y| \triangleq \sum_{j=1}^{n} |c_j(y)|$ si $y \in T(X)$ entonces $(T(X), |\circ|)$ resulta espacio normado. Como $T(X)$ es finito dimensional la norma $|\circ|$ resulta equivalente a la norma de $Y$ relativizada a $T(X)$. En particular, hay alguna constante $\alpha > 0$ tal que $|y| \leq \alpha \|y\|$ si $y \in T(X)$. Así $|c_j(y)| \leq \alpha \|y\|$ si $1 \leq j \leq n$ e $y \in T(X)$ y por el teorema de Hahn-Banach cada $c_j$ admite alguna extensión a una forma lineal $c_j^*$ sobre $Y$ tal que $\left|c_j^*(y)\right| \leq \alpha \|y\|$ si $y \in Y$. Pero entonces $c_1^*, ..., c_n^* \in Y^*$ y si $x \in X$ se tiene $T(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^*\,(T(x))\,y_j$, o bien $T = \sum_{j=1}^{n} y_j \odot T^*(c_j^*)$. Definamos entonces $B : Y \times X^* \to \mathcal{F}\,(X;Y)$ haciendo $B(y, x^*) = y \odot x^*$ si $(y, x^*) \in Y \times X^*$. Evidentemente $B$ es una aplicación bilineal y hay definida entonces una aplicación lineal $\widehat{B} : Y \otimes X^* \to \mathcal{F}\,(X;Y)$ tal que $\widehat{B}\,(y \otimes x^*) = y \odot x^*$ para cada tensor básico $y \otimes x^*$. Por las observaciones anteriores es claro que $\widehat{B}$ es suryectiva. Veamos que $\widehat{B}$ es inyectiva, para lo cual supongamos que $\widehat{B}\,(u) = 0$ para cierto $u \in Y \otimes X^*$, digamos $u = \sum_{i=1}^{s} y_i \otimes x_i^*$. Si $s = 1$ entonces $\langle x, x_1^* \rangle\,y_1 = 0_Y$ para todo $x \in X$. Es claro entonces que $y_1 = 0_Y$ o $x_1^* = 0_{X^*}$, i.e. $u = 0$. Supongamos $s > 1$ y el resultado cierto para tensores que son suma de hasta $s - 1$ tensores básicos. Podemos suponer que el conjunto $\{y_1, ..., y_s\}$ es linealmente independiente, ya que en caso de no serlo podemos extraer un subconjunto máximo linealmente independiente $\{y_{i_1}, ..., y_{i_\alpha}\}$ . Escribimos entonces $y_{i_j} = \sum_{k=1}^{\alpha} c_j^{i_k} y_{i_k}$, donde los escalares $c_j^{i_k}$´s están unívocamente determinados,

$\alpha < j \leq s$ y $\{i_1, ..., i_s\} = \{1, ..., s\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{B}(u) \\ &= \sum_{i=1}^{s} y_i \odot x_i^* \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} y_{i_k} \odot x_{i_k}^* + \sum_{j=k+1}^{s} \left( \sum_{k=1}^{\alpha} c_j^{i_k} y_{i_k} \right) \odot x_{i_j}^* \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} y_{i_k} \odot \left( x_{i_k}^* + \sum_{j=k+1}^{s} c_j^{i_k} x_{i_j}^* \right) \\ &= \widehat{B} \left( \sum_{k=1}^{\alpha} y_{i_k} \otimes \left( x_{i_k}^* + \sum_{j=k+1}^{s} c_j^{i_k} x_{i_j}^* \right) \right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por la hipótesis inductiva, por (4.35) vemos que

$$\sum_{k=1}^{\alpha} y_{i_k} \otimes \left( x_{i_k}^* + \sum_{j=k+1}^{s} c_j^{i_k} x_{i_j}^* \right) = 0,$$

i.e. $u = 0$ y hay un isomorfismo es espacios vectoriales $\mathcal{F}(X, Y) \approx Y \otimes X^*$.

**Observación 2.2.1.** (Cf. [33], Prop. 2.5, p. 7) Mediante una aplicación sencilla de la universalidad del producto tensorial sigue que si $X, Y, Z$ son espacios vectoriales hay un isomorfismo de espacios vectoriales

$$(X \otimes Y) \otimes Z \approx X \otimes (Y \otimes Z).$$

Por otra parte, sean $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ espacios vectoriales, $T_1 \in L(X_1, Y_1), T_2 \in L(X_2, Y_2)$. Existe $T_1 \otimes T_2 \in L(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2)$ único tal que

$$(T_1 \otimes T_2)(x_1 \otimes x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2).$$

### 2.2.2. Producto tensorial inyectivo

Definido el producto tensorial algebraico de dos espacios normados $X$ e $Y$ se procura hacer de $X \otimes Y$ un espacio normado. Para ello combinemos el Ej. 2.2.1 y la Obs. 2.2.1, de modo que si $u \in Y \otimes X^*$ escribimos $|u| \triangleq \left\| \widehat{B}(u) \right\|$. Claramente $|\circ|$ define una norma en $Y \otimes X^*$ y si $u = \sum_{i=1}^{s} y_i \otimes x_i^*$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
|u| &= \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{s} \langle x, x_i^* \rangle \, y_i \right\| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y^*\|=1} \left| \sum_{i=1}^{s} \langle x, x_i^* \rangle \langle y_i, y^* \rangle \right| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y^*\|=1} \left| \left( y^* \otimes \iota_X (x) \right) (u) \right|,
\end{aligned}$$

donde $\iota_X : X \hookrightarrow X^{**}$ es la inmersión natural de $X$ en $X^{**}$ y $\langle x^*, \iota_X(x) \rangle = \langle x, x^* \rangle$ para $x \in X$ y $x^* \in X^*$. Motivados por esta observación en el caso general definimos, para $u \in X \otimes Y$, su *norma tensorial inyectiva*

$$\|u\|_\vee = \sup_{\|x^*\|=1} \sup_{\|y^*\|=1} \left| \left( x^* \otimes y^* \right) (u) \right|. \tag{2.2}$$

La relación (2.2) define efectivamente una norma sobre $X \otimes Y$ e indicamos entonces $X \overset{\vee}{\otimes} Y$ al *producto tensorial inyectivo* o espacio completado correspondiente ([9], Ch. VIII, Prop. 3, p. 223; [33], Prop. 2.7, p. 9).

### 2.2.3. Producto tensorial proyectivo

Dados espacios normados $X$, $Y$, $Z$ sea $\mathcal{B}(X, Y; Z)$ el espacio de aplicaciones bilineales acotadas $X \times Y$ en $Z$, munido de la norma

$$\|b\| = \sup \left\{ \|b(x, y)\| : (x, y) \in X \times Y, \|x\| = \|y\| = 1 \right\}$$

para cada $b \in \mathcal{B}(X, Y; Z)$. El mismo, con la estructura vectorial natural, es espacio de Banach si $Z$ lo es. La aplicación

$$B : X \times Y \to \mathcal{B}\left( X^*, Y^*; \mathbb{C} \right), \; B(x, y) \left( x^*, y^* \right) = \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle$$

está bien definida y es bilineal. Hay definida una aplicación $\widehat{B} : X \otimes Y \to \mathcal{B}(X, Y; \mathbb{C})$ tal que $\widehat{B}(x \otimes y) = B(x, y)$ si $(x, y) \in X \times Y$. Observemos que para $u \in X \otimes Y$ resulta $\left\| \widehat{B}(u) \right\| = \|u\|_\vee$. Asimismo, la aplicación

$$A : X \times Y \to \mathcal{B}(X, Y; \mathbb{C})^*, \; A(x, y)(b) = b(x, y)$$

está bien definida, es bilineal y existe

$$\widehat{A} : X \otimes Y \to \mathcal{B}(X, Y; \mathbb{C})^*$$

tal que $\widehat{A}(x \otimes y) = A(x, y)$ si $(x, y) \in X \times Y$. Si $u \in X \otimes Y$ se tiene entonces

$$\left\| \widehat{A}(u) \right\| = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \|y_j\| : u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \right\} \tag{2.3}$$

(cf. [9], p. 226-227). Al valor común en (4.25) lo denotamos $\|u\|_\wedge$ y queda así definida así una nueva norma sobre $X \otimes Y$, la llamada *norma proyectiva (V.* [33], Prop. 2.7, p. 9). Al correspondiente espacio completado $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ se lo denomina *espacio proyectivo*.

**Observación 2.2.2.** Sean $X, Y, Z$ espacios de Banach. Dado $B \in \mathcal{B}(X, Y; Z)$ existe un único $\widetilde{B} \in \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} Y; Z)$ tal que $\widetilde{B}(x \otimes y) = B(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$ y $\left\| \widetilde{B} \right\| = \|B\|$ (V. [33], Prop. 2.10, p. 11). En particular, hay una aplicación natural $X \overset{\wedge}{\otimes} X^* \hookrightarrow X \overset{\vee}{\otimes} X^*$.

## 2.3. Nuclearidad. Propiedad de aproximación II

**Proposición 2.3.1.** *Si* $(X, Y, \langle \circ, \circ \rangle)$ *es un par de espacios de Banach en dualidad como en §2.1 tal que* $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ *para* $(x, y) \in X \times Y$ *entonces* $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ *es un álgebra de Banach.*

***Demostración.*** Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ sea

$$A_{x_1,y_1} : X \times Y \to X \overset{\wedge}{\otimes} Y, \; A_{x_1,y_1}(x_2, y_2) = \langle x_2, y_1 \rangle x_1 \otimes y_2.$$

Si $(x, y) \in X \times Y$ es $\|x \otimes y\|_\wedge = \|x\| \|y\|$ (V. [33], Pro. 2.7, p. 9). Es fácil ver entonces que

$$A_{x_1,y_1} \in \mathcal{B}(X, Y; X \overset{\wedge}{\otimes} Y) \; y \; \|A_{x_1,y_1}\| \leq \|x_1\| \|y_1\| .$$

Por la Obs. 2.2.2 existe $\overset{\wedge}{A}_{x_1,y_1} \in \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} Y)$ único tal que $\left\| \overset{\wedge}{A}_{x_1,y_1} \right\| = \|A_{x_1,y_1}\|$ y $\overset{\wedge}{A}_{x_1,y_1}(x_2 \otimes y_2) = \langle x_2, y_1 \rangle x_1 \otimes y_2$ si $(x_2, y_2) \in X \times Y$. Pero $\overset{\wedge}{A} \in \mathcal{B}(X, Y; \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} Y))$ y existe $\overline{A} \in \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} Y; \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} Y))$ único tal que $\|\overline{A}\| = \left\| \overset{\wedge}{A} \right\|$ y $\overline{A}(x \otimes y) = \overset{\wedge}{A}_{x,y}$ si $(x, y) \in X \times Y$. Fijemos $u, v \in X \otimes Y$, digamos $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes y_i^1$ y $v = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \otimes y_j^2$.

Entonces

$$\begin{aligned} \left\|\overline{A}(u)(v)\right\|_\wedge &\leq \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \left\| \overset{\wedge}{A}_{x_i^1, y_i^1}\left(x_j^2 \otimes y_j^2\right)\right\|_\wedge \\ &\leq \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \left|\left\langle x_j^2, y_i^1\right\rangle\right| \left\|x_i^1 \otimes y_j^2\right\|_\wedge \\ &\leq \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \left\|x_i^1\right\| \left\|y_i^1\right\| \left\|x_j^2\right\| \left\|y_j^2\right\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| \left\|y_i^1\right\| \sum_{j=1}^{m} \left\|x_j^2\right\| \left\|y_j^2\right\|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Puesto que (2.4) es válido para toda posible escritura tanto de $u$ como de $v$ deducimos que $\left\|\overline{A}(u)(v)\right\|_\wedge \leq \|u\|_\wedge \|v\|_\wedge$. Pero $\overline{A}(u) \in \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} Y)$ y $X \otimes Y$ es denso en $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ por lo cual $\left\|\overline{A}(u)\right\|_\wedge \leq \|u\|_\wedge$. Asimismo, $\overline{A} \in \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} Y; \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} Y))$ e inferimos que $\left\|\overline{A}\right\| \leq 1$. Dados entonces $\phi, \psi \in X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ definimos $\phi \cdot \psi \triangleq \overline{A}(\phi)(\psi)$. En particular es válida la identidad $\overline{A}\left(\overline{A}(\phi)(\psi)\right) = \overline{A}(\phi) \circ \overline{A}(\psi)$, de donde sigue enseguida la transitividad de esta operación. Finalmente, siendo $\overline{A}$ contractivo sigue la afirmación. ■

**Observación 2.3.2.** Por la Obs. 2.2.2 se puede dar una descripción más precisa de los elementos del producto tensorial proyectivo. Si $u \in X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ hay sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en $X$ e $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ en $Y$ tales que $u = \sum_{n=1}^\infty x_n \otimes y_n$ y $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| \|y_n\| < \infty$ (cf. [48], Prop. B.2.11, p. 251). En consecuencia, si $(X, Y, \langle \circ, \circ \rangle)$ es un par dual de espacios de Banach como en la Sección 2.1 la aplicación $\Lambda : X \overset{\wedge}{\otimes} Y \to \mathcal{N}_Y(X)$ tal que $\Lambda(x \otimes y) = x \odot y$ si $(x, y) \in X \times Y$ es un homomorfismo acotado suryectivo e induce un isomorfismo isométrico $\mathcal{N}_Y(X) \approx (X \overset{\wedge}{\otimes} Y)/\ker(\Lambda)$ de álgebras de Banach.

Están dadas las condiciones para caracterizar los espacios de Banach con la propiedad de aproximación.

**Teorema 2.3.3.** *(Cf. [48], Th. C.1.5, p. 256) Sea $X$ espacio de Banach complejo. Son equivalentes:*

**(i)** $X$ tiene la propiedad de aproximación.

**(ii)** Si $Y$ es espacio de Banach la inmersión canónica $X \overset{\wedge}{\otimes} Y \hookrightarrow X \overset{\vee}{\otimes} Y$ es inyectiva.

**(iii)** La aplicación natural $X \overset{\wedge}{\otimes} X^* \hookrightarrow X \overset{\vee}{\otimes} X^*$ es inyectiva.

**(iv)** La aplicación $X \overset{\wedge}{\otimes} X^* \to \mathcal{N}_{X^*}(X)$, $x \otimes x^* \to x \odot x^*$ es un isomorfismo isométrico.

**Observación 2.3.4.** De la prueba de la Prop. 2.3.1, si $X$ tiene la propiedad de aproximación el isomorfismo isométrico observado en el Teo. 2.3.3,(iv) es isomorfismo de álgebras de Banach.

Sea $u \in X \overset{\wedge}{\otimes} X^* - \{0\}$, digamos $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes x_n^*$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|x_n^*\| < \infty$. Más aún, podemos suponer que $\{x_n\} \in c_0(X)$ y $\{x_n^*\} \in l^1(X^*)$ (cf. [48], p. 257). Si $X$ tuviere la propiedad de aproximación finita, como $\{x_n\} \cup \{0_X\}$ es compacto existirá $S \in \mathcal{F}(X)$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S(x_n) - x_n\| < \frac{\|u\|_\wedge}{2\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|}.$$

Si $v = \sum_{n=1}^{\infty} S(x_n) \otimes x_n^*$ vemos que

$$\|u - v\|_\wedge \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|S(x_n) - x_n\| \|x_n^*\| < \|u\|_\wedge / 2,$$

de donde $v \neq 0$. Indiquemos $S$ en la forma $S = \sum_{m=1}^{p} y_m \odot y_m^*$ con $\{y_m\}_{m=1}^{p} \subseteq X$ e $\{y_m^*\}_{m=1}^{p} \subseteq X^*$. Entonces

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{p} \langle x_n, y_m^* \rangle y_m \otimes x_n^* = \sum_{m=1}^{p} y_m \otimes \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_m^* \rangle x_n^* \neq 0$$

y existe $y^* \in X^*$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y^* \rangle x_n^* \neq 0_{X^*}$. En consecuencia existe $y^{**} \in X^{**}$ tal que

$$0 \neq \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y^* \rangle x_n^*, y^{**} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y^* \rangle \langle x_n^*, y^{**} \rangle = y^* \otimes y^{**}(u).$$

Luego $\iota(u) \neq 0$, donde $\iota : X \overset{\wedge}{\otimes} Y \hookrightarrow X \overset{\vee}{\otimes} Y$ es la inmersión canónica. Más aún, fijado $w = \sum_{j=1}^{q} z_j \otimes z_j^*$ en $X \otimes X^*$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\tau(w)\|_{\mathcal{B}(X)} &= \|\tau(w)^*\|_{\mathcal{B}(X^*)} \\
&= \sup_{\|x^*\|=1} \|x^* \circ \tau(w)\| \\
&= \sup_{\|x^*\|=1} \sup_{\|x^{**}\|=1} |\langle x^* \circ \tau(w), x^{**} \rangle| \\
&= \sup_{\|x^{**}\|=1} \sup_{\|x^*\|=1} \left| \sum_{j=1}^{q} \langle z_j, x^* \rangle \langle z_j^*, x^{**} \rangle \right| \\
&= \sup_{\|x^{**}\|=1} \sup_{\|x^*\|=1} |(x^* \otimes x^{**})(w)| \\
&= \|w\|_\vee
\end{aligned}$$

y $\tau\mid_{X \otimes X^*}$ es isométrica.

Es más, $\tau$ se extiende a un isomorfismo isométrico $\widetilde{\tau} : X \overset{\vee}{\otimes} X^* \to \mathcal{A}(X)$, donde $\mathcal{A}(X)$ es la clausura en $\mathcal{B}(X)$ de $\mathcal{F}(X)$ o álgebra uniforme de operadores aproximables sobre $X$. Observamos entonces que $\mathcal{N}(X)$ es un ideal de $\mathcal{B}(X)$ contenido en $\mathcal{A}(X)$ y que $\tau = \widetilde{\tau} \circ \iota$ resulta isométrica. Por otra parte, por la Prop. 2.3.1 dados $x_1, x_2 \in X$ y $x_1^*, x_2^* \in X^*$ se tiene

$$\begin{aligned} \tau\left((x_1 \otimes x_1^*)(x_2 \otimes x_2^*)\right) &= \langle x_2, x_1^* \rangle \, \tau(x_1 \otimes x_2^*) \\ &= \langle x_2, x_1^* \rangle (x_1 \odot x_2^*) \\ &= (x_1 \odot x_1^*) \circ (x_2 \odot x_2^*) \\ &= \tau(x_1 \otimes x_1^*) \, \tau(x_2 \otimes x_2^*), \end{aligned}$$

de donde sigue enseguida que $\tau$ es un homomorfismo de álgebras.

## 2.4. Álgebras nucleares, biflats, biproyectivas.

**Observación 2.4.1.** Sean $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach, $X$ un $\mathcal{U}$-módulo de Banach a izquierda e $Y$ un $\mathcal{U}$-módulo de Banach a derecha. Aplicando la Obs. 2.2.2 hay definida una estructura de $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach sobre $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ de manera que $a(x \otimes y) = (ax) \otimes y$ y $(x \otimes y) a = x \otimes (ya)$ para todo $a \in \mathcal{U}$, $x \in X$ e $y \in Y$ (Cf. [33], Corolario 2.11, p. 12).

**Observación 2.4.2.** (Cf. [19], Th. 51) Por la Obs. 2.4.1, en las condiciones de la Prop. 2.3.1 por la Obs. 2.2.2 existe $\Delta \in \mathcal{B}((X \overset{\wedge}{\otimes} Y) \overset{\wedge}{\otimes} (X \overset{\wedge}{\otimes} Y); X \overset{\wedge}{\otimes} Y)$ tal que $\Delta(\phi \otimes \psi) = \phi \cdot \psi$ para $\phi, \psi \in X \overset{\wedge}{\otimes} Y$. Fijados $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tales que $\langle x_0, y_0 \rangle = 1$ sabemos que hay definida una aplicación lineal acotada

$$\Theta : X \overset{\wedge}{\otimes} Y \to (X \overset{\wedge}{\otimes} Y) \overset{\wedge}{\otimes} (X \overset{\wedge}{\otimes} Y), \; \Theta(x \otimes y) = (x \otimes y_0) \otimes (x_0 \otimes y)$$

si $(x, y) \in X \otimes Y$. Es fácil ver que $\Delta \circ \Theta = \mathrm{Id}_{X \overset{\wedge}{\otimes} Y}$ y

$$\Theta(\phi \cdot \psi) = \phi \Theta(\psi) = \Theta(\phi) \psi,$$

i.e. $\Theta$ es homomorfismo de $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$-bimódulos. En consecuencia $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ se inscribe en la clase más general de álgebras de Banach $\mathcal{U}$ llamadas biproyectivas, i.e. el homomorfismo de $\mathcal{U}$-bimódulos $\Delta_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ tal que $\Delta_{\mathcal{U}}(a \otimes b) = ab$ para todo $a, b \in \mathcal{U}$ es una retracción (i.e. $\Delta_{\mathcal{U}}$ posee un homomorfismo de $\mathcal{U}$-bimódulos acotado que es inverso a derecha).

**Observación 2.4.3.** Si $\mathcal{U}$ es un álgebra de Banach biproyectiva $\Delta_{\mathcal{U}}^* : \mathcal{U}^* \to (\mathcal{U} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{U})^*$ posee un homomorfismo de $\mathcal{U}$-bimódulos acotado que es inverso a izquierda, característica que define a las álgebras de Banach llamadas *biflats*. Éstas se caracterízan por la existencia de un homomorfismo acotado de $\mathcal{U}$-bimódulos $\rho : \mathcal{U} \to (\mathcal{U} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{U})^{**}$ tales que $\Delta_{\mathcal{U}}^{**} \circ \rho$ es la inmersión canónica $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}^{**}$. Precisamente, sea $\eta$ homomorfismo acotado de $\mathcal{U}$-bimódulos de modo que $\eta \circ \Delta_{\mathcal{U}}^{*} = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}^*}$. La aplicación $\rho \triangleq \eta^* \circ \iota_{\mathcal{U}}$ es un homomorfismo acotado de $\mathcal{U}$-bimódulos y

$$\Delta_{\mathcal{U}}^{**} \circ \rho = (\Delta_{\mathcal{U}}^{**} \circ \eta^*) \circ \iota_{\mathcal{U}} = \underset{\mathcal{U}^*}{\overset{*}{\mathrm{Id}}} \circ \iota_{\mathcal{U}} = \underset{\mathcal{U}^{**}}{\mathrm{Id}} \circ \iota_{\mathcal{U}} = \iota_{\mathcal{U}}.$$

Recíprocamente, sea $\rho : \mathcal{U} \to (\mathcal{U} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{U})^{**}$ un homomorfismo acotado de $\mathcal{U}$-bimódulos tal que $\Delta_{\mathcal{U}}^{**} \circ \rho = \iota_{\mathcal{U}}$. Hacemos ahora $\eta \triangleq \rho^* \circ \iota_{(\mathcal{U} \hat{\otimes} \mathcal{U})^*}$ y si $(a, a^*) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}^*$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle a, (\eta \circ \Delta_{\mathcal{U}}^{*})(a^*) \rangle &= \left\langle \rho(a), \iota_{(\mathcal{U} \hat{\otimes} \mathcal{U})^*}(\Delta_{\mathcal{U}}^{*}(a^*)) \right\rangle \\ &= \langle \Delta_{\mathcal{U}}^{*}(a^*), \rho(a) \rangle \\ &= \langle a^*, \iota_{\mathcal{U}}(a) \rangle \\ &= \langle a, a^* \rangle, \end{aligned}$$

de donde sigue la afirmación.

**Observación 2.4.4.** Si $\mathcal{U}$ es álgebra de Banach biflat entonces resulta simplicialmente trivial, es decir $\mathcal{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) = \{0\}$ si $n \in \mathbb{N}$ [3]. En particular, estas álgebras devienen débilmente amenables y por lo tanto son esenciales [4] y no poseen derivadas puntuales continuas no nulas[5] [8]. Si además $\mathcal{U}$ fuere abeliana entonces $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, X) = \{0\}$ cualquiera sea el $\mathcal{U}$-bimódulo de Banach $X$ [2].

## 2.5. Álgebras nucleares y amenabilidad

**Teorema 2.5.1.** *Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach. Son equivalentes:*

**(i)** *$\mathcal{U}$ es amenable.*

**(ii)** *$\mathcal{U}$ tiene alguna diagonal aproximada.*

**(iii)** *$\mathcal{U}$ tiene alguna diagonal virtual.*

[3]V. [7], Prop. 2.8.62, p. 298. Respecto a espacios de cohomología de orden superior v. [33], §3.1.1, p. 18.

[4]Un álgebra de Banach $\mathcal{U}$ es *esencial* si la cápsula lineal de todos los elementos de la forma $ab$ con $a, b \in \mathcal{U}$ es densa en $\mathcal{U}$.

[5]Una aplicación lineal $d : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ se dice *derivación puntual* si hay algún homomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ tal que $d(ab) = d(a)\varphi(b) + \varphi(a)d(b)$ para todo $a, b \in \mathcal{U}$.

**(iv)** *$\mathcal{U}$ tiene una aproximación acotada de la identidad*[6] *y es biflat.*

Las tres primeras equivalencias, ya señaladas en la Sección 4.2.43, son la caracterización de álgebras amenables efectuada por B. E. Johnson hacia 1972 en su importante trabajo [22]. Sobre el particular puede verse también [33], §3.2, p. 28. La equivalencia entre amenabilidad y la condición de biflat y existencia de aproximaciones acotadas de la identidad fue establecida en [20].

**Teorema 2.5.2.** *Sea $(X, Y, \langle \circ, \circ \rangle)$ un par dual de espacios de Banach. Son equivalentes:*

**(i)** $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ es super-amenable.

**(ii)** $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ es amenable.

**(iii)** $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ tiene aproximación acotada de la identidad.

**(iv)** $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$ tiene aproximación acotada a izquierda de la identidad.

**(v)** $\mathcal{N}_Y(X)$ tiene aproximación acotada a izquierda de la identidad.

**(vi)** $\dim_{\mathbb{C}}(X) = \dim_{\mathbb{C}}(Y) < \infty$.

**Observación 2.5.3.** La afirmaciones $(i) \Rightarrow (ii)$ y $(iii) \Rightarrow (iv)$ son inmediatas; $(ii) \Rightarrow (iii)$ sigue del Teorema 2.5.1; $(iv) \Rightarrow (v)$ es consecuencia de la Obs. 2.3.2. La afirmación $(vi) \Rightarrow (i)$ es consecuencia del hecho que $X \overset{\wedge}{\otimes} Y \approx \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$, donde $d$ es la dimensión común de $X$ e $Y$. La afirmación $(v) \Rightarrow (vi)$ constituye, en este contexto, la parte más delicada (V. [13], Th. 5).[7]

[6] En un álgebra de Banach $\mathcal{U}$ una red $\{a_s\}_{s\in\sigma}$ es una *aproximación de la identidad a izquierda* (resp. *a derecha*) si $\lim_{s\in\sigma}(a_s x) = x$ (resp. $\lim_{s\in\sigma}(x a_s) = x$) para todo $x \in \mathcal{U}$. Será *aproximación de la identidad* si lo es tanto a derecha como a izquierda.

[7] Sea $\{S_j\}_{j\in J}$ es una aproximación acotada a izquierda de la identidad de $\mathcal{N}_Y(X)$. En primer lugar probaremos que $Id_X = s\text{-}\lim_{j\in J} S_j$; precisamente, fijemos $x \in X$, que podemos suponer no nulo. Como $\langle \circ, \circ \rangle$ es no degenerado existe $y \in Y$ tal que $\langle x, y \rangle = \|x\|$. Si $j \in J$ resulta

$$\begin{aligned} \|S_j \circ (x \odot y) - x \odot y\|_{\wedge} &\geq \|S_j \circ (x \odot y) - x \odot y\| \\ &= \|S_j(x) \odot y - x \odot y\| \\ &\geq \|S_j(x) - x\| . \end{aligned} \tag{2.5}$$

De (4.48) deducimos que $\lim_{j\in J} S_j(x) = x$. Es inmediato ahora que la red $\{S_j\}_{j\in J}$ converge a $Id_X$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $X$. Luego $\{S_j\}_{j\in J}$ es una aproximación acotada de la identidad a izquierda del ideal de operadores compactos $\mathcal{K}(X)$ sobre $X$. Por otra parte, el álgebra de límites uniformes de operadores de rango finito $\mathcal{A}(X)$ es un $\mathcal{N}_Y(X)$-bimódulo de Banach. Por el teorema de factorización de Cohen todo operador aproximable será el producto de algún elemento de $\mathcal{N}_Y(X)$ por otro operador aproximable (V. [33], Teorema 2.12, p. 12). Pero $\mathcal{N}_Y(X) \subseteq \mathcal{N}(X)$ y $\mathcal{N}(X)$ es un ideal

## 2.6. Dv´s en álgebras de operadores nucleares

Por la universalidad del producto tensorial y propiedades inherentes de productos tensoriales proyectivos como vimos en la Obs. 2.2.2 dado $T \in \mathcal{B}(X)$ hay un único $\delta_T \in \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ tal que

$$\delta_T (x \otimes x^*) = T(x) \otimes x^* - x \otimes T^* (x^*) \text{ si } (x, x^*) \in X \times X^*. \tag{2.6}$$

Queda definido un operador $\delta_X : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ lineal acotado $\delta_X(T) \triangleq \delta_T$ y es fácil verificar que $R(\delta_X) \subseteq \mathcal{D}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$. Llamaremos *$\mathcal{B}$-derivaciones* a aquellas que pertenezcan al rango de $\delta_X$, que indicaremos $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(X)$, y volveremos sobre ellas en el Capítulo 3. Nada indica en este contexto que estemos en presencia de derivaciones internas, o al menos eso dista de ser obvio. Esto quizás no sorprenda, es esperable que la estructura general de derivaciones sea más compleja en el caso de espacios de Banach generales. Por el Teorema 2.5.2 sabemos que condiciones de amenabilidad o super-amenabilidad imponen severas restricciones respecto a derivaciones en álgebras de operadores nucleares soportadas sobre pares de espacios de Banach en dualidad, ya que entonces ambos espacios deberán tener la misma dimensión finita. En general, poco podemos anticipar respecto a la estructura y propiedades de elementos de $\mathcal{Z}^1(X \overset{\wedge}{\otimes} Y)$, el espacio de derivaciones sobre $X \overset{\wedge}{\otimes} Y$, siendo $(X, Y, \langle \circ, \circ \rangle)$ un par dual de espacios de Banach. Hemos consignado que un espacio de Banach $X$ tiene la propiedad de aproximación si posee una base. La existencia de bases en espacios de Banach ha sido pro-blemática y difícil de decidir, pero se sabe que hay espacios de Banach que no tienen base de Schauder [11]. Hemos señalado que dados una base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}$ de $X$ y $x \in X$ se determina una única sucesión de escalares $\{x_n^* (x)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* (x) \, x_n$. Evidentemente $\{x_n^*\}_{n=1}$ es una sucesión de aplicaciones lineales sobre $X$ unívocamente determinada por la base, resultando siempre $\{x_n^*\}_{n=1} \subseteq X^*$ [3]; [54], Th. 3.1, p. 20). Restringiremos nuestra investigación al caso de espacios de Banach $X$ munidos de una *base shrinking* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, condición bajo

en $\mathcal{A}(X)$, de manera que $\mathcal{A}(X) = \mathcal{N}(X)$. Ahora, hay una única aplicación $\mathrm{Tr} : X \otimes X^* \to \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Tr}(x \otimes x^*) = \langle x, x^* \rangle$ para cada $(x, x^*) \in X \times X^*$. Como $|\mathrm{Tr}(u)| \leq \|u\|_{\wedge}$ por el teorema de Hahn-Banach el operador Tr admite una extensión a una forma lineal acotada sobre $\mathcal{A}(X)$. Además $X$ e $Y$ deben tener la misma dimensión, ya que $X \hookrightarrow Y^*$ y por lo tanto $\dim_{\mathbb{C}}(X) \leq \dim_{\mathbb{C}}(Y^*)$. Luego, si $X$ fuere infinito dimensional también lo sería $Y^*$ y por lo tanto también $Y$. Como también $Y \hookrightarrow X^*$ podemos suponer que $X$ e $Y$ son finito-dimensionales. Pero entonces

$$\dim_{\mathbb{C}}(X) \leq \dim_{\mathbb{C}}(Y^*) = \dim(Y) \leq \dim(X^*) = \dim(X).$$

Finalmente, supongamos que $X$ e $Y$ son ambos infinito-dimensionales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay una proyección $P_n$ de rango $n$-dimensional tal que $\|P_n\| \leq \sqrt{n}$ (cf. [47], Th. 1.14). Podemos representar $P_n = \sum_{j=1}^{n} x_{n,j} \odot x_{n,j}^*$, donde $\left\langle x_{n,j}, x_{n,k}^* \right\rangle = \delta_{j,k}$ para $n, j, k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq j, k \leq n$. Así $\mathrm{Tr}(P_n/\sqrt{n}) = \sqrt{n}$ para todo $n$, lo que contradice la continuidad de la forma lineal Tr.

la cual $\{x_n^*\}_{n=1}$ es base de $X^*$. P. ej. $\left\{\{\delta_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es base shrinking de $c_0(\mathbb{N})$ pero no lo es de $l^1(\mathbb{N})$.

**Proposición 2.6.1.** *(cf. [?]) Sean $X_1, X_2$ espacios de Banach munidos de bases $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ respectivamente y sea $\alpha$ una norma cruzada uniforme*[8] *sobre $X_1 \otimes X_2$. Entonces $X_1 \overset{\alpha}{\otimes} X_2$ tiene una base de Schauder $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

***Demostración.*** Si $m \in \mathbb{N}$ sean $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n-1)^2 < m \le n^2$$

y

$$z_m \triangleq x_{1,\sigma_1(m)} \otimes x_{2,\sigma_2(m)}$$

con

$$\sigma(m) = \begin{cases} \left(m-(n-1)^2, n\right) & si \quad (n-1)^2+1 \le m \le (n-1)^2+n, \\ (n, n^2-m+1) & si \quad (n-1)^2+n \le m \le n^2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ vamos a indicar $s_n^i(x_i) = \sum_{m=1}^{n} x_{i,m}^*(x_i)\, x_{i,m}$, donde $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$. Escribiendo

$$\begin{aligned} R_n &\triangleq x_1 \otimes x_2 - \sum_{i,j=1}^{n} x_{1,i}^*(x_1)\, x_{2,j}^*(x_2)\,(x_{1,i} \otimes x_{2,j}) \qquad (2.8)\\ &= x_1 \otimes x_2 - s_n^1(x_1) \otimes s_n^2(x_2) \\ &= x_1 \otimes \left(x_2 - s_n^2(x_2)\right) + \left(x_1 - s_n^1(x_1)\right) \otimes s_n^2(x_2) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha(R_n) &\le \alpha\left(x_1 \otimes \left(x_2 - s_n^2(x_2)\right)\right) + \alpha\left(\left(x_1 - s_n^1(x_1)\right) \otimes s_n^2(x_2)\right) \qquad (2.9)\\ &\le \|x_1\| \left\|x_2 - s_n^2(x_2)\right\| + \left\|x_1 - s_n^1(x_1)\right\| + \left\|s_n^2(x_2)\right\|. \end{aligned}$$

Es inmediato por (4.49) que $\alpha(R_n) \to 0$ si $n \to \infty$ y $x_1 \otimes x_2$ pertenece a la cápsula lineal $\alpha$-cerrada $[z_n]_{n=1}^{\infty}$ generada por $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Así $X_1 \otimes X_2 \subseteq [z_n]_{n=1}^{\infty}$ y $X_1 \overset{\alpha}{\otimes} X_2 = [z_n]_{n=1}^{\infty}$.

[8] Una *norma cruzada uniforme* $\alpha$ sobre $X \otimes Y$ es una norma en el sentido usual tal que

$$\alpha(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\| \;\; si \;\; (x, y) \in X \times Y$$

y si dados $S \in \mathcal{B}(X)$, $T \in \mathcal{B}(Y)$ y $u \in X \otimes Y$ se tiene $\alpha((S \otimes T)(u)) \le \|S\| \|T\| \alpha(u)$. Indicamos entonces $X \overset{\alpha}{\otimes} Y$ a la completación de $X \otimes Y$ respecto a la norma $\alpha$. P. ej. las normas inyectiva y proyectiva son cruzadas razonables (V. [9], Ch. VIII, Prop. 3 y Prop 8).

Por (4.50) si $n > 1$ tenemos además

$$\begin{aligned}
s^1_{n-1}(x_1) \otimes s^2_{n-1}(x_2) &= \left( (\sum_{m=1}^{n-1} x_{1,m} \odot x^*_{1,m}) \otimes (\sum_{m=1}^{n-1} x_{2,m} \odot x^*_{2,m}) \right) (x_1 \otimes x_2) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(x_{1,i} \odot x^*_{1,i}\right) \otimes \left(x_{2,j} \odot x^*_{2,j}\right) (x_1 \otimes x_2) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left\langle x_1, x^*_{1,i}\right\rangle \left\langle x_2, x^*_{2,j}\right\rangle x_{1,i} \otimes x_{2,j} \\
&= \sum_{m=1}^{(n-1)^2} \left\langle x_1 \otimes x_2, z^*_m\right\rangle z_m \\
&\triangleq s_{(n-1)^2}(x_1 \otimes x_2),
\end{aligned}$$

i.e. para $n > 1$ resulta

$$s_{(n-1)^2} = s^1_{n-1} \otimes s^2_{n-1}. \tag{2.10}$$

Por otra parte

$$s_{(n-1)^2+m} = s^1_{n-1} \otimes s^2_{n-1} + s^1_m \otimes (s^2_n - s^2_{n-1}) \text{ si } 1 \leq m \leq n-1. \tag{2.11}$$

Precisamente, escribimos

$$\begin{aligned}
S_m &\triangleq s^1_{n-1} \otimes s^2_{n-1} + s^1_m \otimes (s^2_n - s^2_{n-1}) \qquad (2.12) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(x_{1,i} \odot x^*_{1,i}\right) \otimes \left(x_{2,j} \odot x^*_{2,j}\right) + \sum_{k=1}^{m} \left(x_{1,k} \odot x^*_{1,k}\right) \otimes \left(x_{2,n} \odot x^*_{2,n}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(x_{1,i} \otimes x_{2,j}\right) \odot \left(x^*_{1,i} \otimes x^*_{2,j}\right) + \sum_{k=1}^{m} \left(x_{1,k} \otimes x_{2,n}\right) \odot \left(x^*_{1,k} \otimes x^*_{2,n}\right).
\end{aligned}$$

Para $1 \leq l \leq (n-1)^2$ se tiene $\left\langle z_l, \left(x^*_{1,k} \otimes x^*_{2,n}\right)\right\rangle = 0$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$, y por (4.50) y 4.52 es

$$S_m(z_l) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \left\langle z_l, x^*_{1,i} \otimes x^*_{2,j}\right\rangle (x_{1,i} \otimes x_{2,j}) = z_l,$$

si $(n-1)^2 < l \leq (n-1)^2 + m$ entonces

$$S_m(z_l) = \sum_{k=1}^{m} \left\langle z_l, x^*_{1,k} \otimes x^*_{2,n}\right\rangle = z_l$$

y $S_m(z_l) = 0$ si $l > (n-1)^2 + m$, i.e. $s_{(n-1)^2+m} = S_m$ y sigue (2.11). Ahora resulta

$$s_{(n-1)^2+n+m} = s^1_n \otimes s^2_n - \left(s^1_n - s^1_{n-1}\right) \otimes s^2_{n-1-m} \text{ si } 1 \leq m \leq n-1;\ s^2_0 = 0. \tag{2.13}$$

En efecto, hagamos

$$\begin{aligned} T_m &\triangleq s_n^1 \otimes s_n^2 - \left(s_n^1 - s_{n-1}^1\right) \otimes s_{n-1-m}^2 \qquad (2.14) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(x_{1,i} \otimes x_{2,j}\right) \odot \left(x_{1,i}^* \otimes x_{2,j}^*\right) - \sum_{k=1}^{n-1-m} \left(x_{1,n} \otimes x_{2,k}\right) \odot \left(x_{1,n}^* \otimes x_{2,k}^*\right). \end{aligned}$$

Si $1 \leq l \leq (n-1)^2$ es

$$T_m\left(z_l\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle z_l, x_{1,i}^* \otimes x_{2,j}^* \right\rangle \left(x_{1,i} \otimes x_{2,j}\right) = z_l,$$

si $(n-1)^2 < l \leq (n-1)^2 + n$ por (4.50) y (4.42) es

$$T_m\left(z_l\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle x_{1,l-(n-1)^2} \otimes x_{2,n}, x_{1,i}^* \otimes x_{2,j}^* \right\rangle \left(x_{1,i} \otimes x_{2,j}\right) = z_l,$$

si $(n-1)^2 + n < l \leq (n-1)^2 + n + m$ por (4.50) y (4.42) es $T_m\left(z_l\right) = z_l$ porque

$$n - 1 - m < n^2 - l + 1.$$

Si $(n-1)^2 + n + m < l \leq n^2$ entonces $(n-1)^2 + n + m + 1 \leq l$ y $l - m \geq n^2 - n + 2$, o sea $n - 1 - m \geq n^2 - l + 1$ y ahora $T_m\left(z_l\right) = 0$. Asimismo, $s_{(n-1)^2+n+m}\left(z_l\right) = 0$. Finalmente,

$$s_{(n-1)^2+n+m}\left(z_l\right) = T_m\left(z_l\right) = 0$$

si $l > n^2$ y sigue (4.41). Ahora, por (4.51), (2.11) y (4.41). Por el teorema de acotación uniforme las sucesiones de operadores $\{s_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ son acotadas en $\mathcal{B}\left(X_1\right)$ y $\mathcal{B}\left(X_2\right)$ respectivamente. Por (2.8) y (4.51) es claro que $\lim_{n\to\infty} s_{n^2}\left(u\right) = u$ para todo $u \in X_1 \otimes X_2$. Si $u$ es un tensor básico, digamos $u = x_1 \otimes x_2$, en las condiciones de (2.11) tenemos también

$$\begin{aligned} \alpha\left(s_{(n-1)^2+m}\left(u\right) - u\right) &\leq \alpha\left(s_{(n-1)^2}\left(u\right) - u\right) + \left\|s_m^1\left(x\right)\right\| \left\|s_n^2\left(y\right) - s_{n-1}^2\left(y\right)\right\| \qquad (2.15) \\ &\leq \alpha\left(s_{(n-1)^2}\left(u\right) - u\right) + \|x\| \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|s_m^1\right\| \left\|s_n^2\left(y\right) - s_{n-1}^2\left(y\right)\right\|. \end{aligned}$$

Por (2.15) inferimos que $\lim_{m\to\infty} s_{(n-1)^2+m}\left(u\right) = u$ para cada $u \in X_1 \otimes X_2$.[9] El mismo razonamiento empleamos en las condiciones de (4.41) y, en definitiva, $u = \lim_{n\to\infty} s_n(u)$ para todo $u \in X_1 \otimes X_2$. En particular, como $\alpha$ es norma cruzada uniforme la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ devendrá acotada en $\mathcal{B}(X_1 \overset{\alpha}{\otimes} X_2)$.

[9] Siempre dado $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ único tal que $(n-1)^2 < m \leq n^2$, i.e. $n = n(m)$.

Dados ahora $v \in X_1 \overset{\alpha}{\otimes} X_2$ y $\varepsilon > 0$ sea $u$ una combinación lineal finita de elementos de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\alpha(u-v) \leq \varepsilon/(1+\sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n\|_{\mathcal{B}(X_1 \overset{\alpha}{\otimes} X_2)})$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n(u) = u$ si $n \geq n_0$, de modo que

$$\begin{aligned}\alpha(v - s_n(v)) &\leq \alpha(v-u) + \alpha(u - s_n(v)) \\ &\leq \alpha(v-u) + \alpha(s_n(u-v)) \\ &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

de donde $v = \lim_{n\to\infty} s_n(v)$ y sigue la tesis. ■

**Observación 2.6.2.** La aplicación $\sigma$ definida en (4.50) es biyectiva, si $n, m \in \mathbb{N}$ resulta

$$\sigma^{-1}(n,m) = \begin{cases} n^2 - m + 1 & si \quad 1 \leq m \leq n, \\ (m-1)^2 + n & si \quad m > n \end{cases}$$

y además

$$\begin{aligned}\sigma_1^{-1}(\{n\}) &= \left\{n^2 - k + 1\right\}_{1\leq k\leq n} \cup \left\{k^2 + n\right\}_{k\geq n}, \\ \sigma_2^{-1}(\{m\}) &= \left\{(m-1)^2 + k\right\}_{1\leq k\leq m} \cup \left\{k^2 - m + 1\right\}_{k>m}.\end{aligned}$$

**Corolario 2.6.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach con una base shrinking $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sean $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ como en (4.50), $z_m = x_{\sigma_1(m)} \otimes x_{\sigma_2(m)}$ y $z_m^* = x_{\sigma_1(m)}^* \otimes x_{\sigma_2(m)}^*$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ es base de Schauder de $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$, cuya correspondiente sucesión de coeficientes lineales asociada es $\{z_m^*\}_{m=1}^{\infty}$.*

**Teorema 2.6.4.** *(cf. [4]) En las condiciones del Corolario 2.6.3 si $\delta \in \mathcal{D}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ existen sucesiones únicas $\{\mathfrak{h}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\mathfrak{y}_u^v\}_{u,v\in\mathbb{N}}$ tales que si $u, v \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\delta\left(z_{\sigma^{-1}(u,v)}\right) = (\mathfrak{h}_u - \mathfrak{h}_v)\, z_{\sigma^{-1}(u,v)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathfrak{n}_u^n \cdot z_{\sigma^{-1}(n,v)} - \mathfrak{n}_n^v \cdot z_{\sigma^{-1}(u,n)}\right). \tag{2.16}$$

*Más aún, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}[\delta] = \left\{\left\langle \delta(z_{n^2}), z_{n^2}^* \right\rangle\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}[\delta] = (\mathfrak{n}_n^m)_{n,m=1}^{\infty}$, si $n, m \in \mathbb{N}$ resulta*

$$\langle \delta(z_m), z_n^* \rangle = \begin{cases} \mathfrak{h}_{\sigma_1(m)} - \mathfrak{h}_{\sigma_2(m)} & si \quad n = m, \\ \mathfrak{n}_{\sigma_1(m)}^{\sigma_1(n)} & si \quad \sigma_1(n) \neq \sigma_1(m) \text{ y } \sigma_2(n) = \sigma_2(m), \\ -\mathfrak{n}_{\sigma_2(n)}^{\sigma_2(m)} & si \quad \sigma_1(n) = \sigma_1(m) \text{ y } \sigma_2(n) \neq \sigma_2(m), \\ 0 & si \quad \sigma_1(n) \neq \sigma_1(m) \text{ y } \sigma_2(n) \neq \sigma_2(m). \end{cases}$$

*y para $v \in X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ se tiene*

$$\delta(v) = \sum_{n=1}^{\infty} z_m \sum_{m=1}^{\infty} \langle \delta(z_m), z_n^* \rangle \langle v, z_m^* \rangle.$$

***Demostración.*** Sea $\left\{\mathfrak{h}_{u,v}^{n}\right\}_{u,v,n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\delta\left(z_{\sigma^{-1}(u,v)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{h}_{u,v}^{n} z_n$ si $u, v \in \mathbb{N}$. Si $u, v, t \in \mathbb{N}$ entonces $x_u \otimes x_v^* = (x_u \otimes x_t^*)(x_t \otimes x_v^*)$ y

$$
\begin{aligned}
\delta\left(x_u \otimes x_v^*\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{h}_{u,v}^{n}\left(x_{\sigma_1(n)} \otimes x_{\sigma_2(n)}^*\right) \qquad (2.17)\\
&= \delta\left(x_u \otimes x_t^*\right)\left(x_t \otimes x_v^*\right) + \left(x_u \otimes x_t^*\right)\delta\left(x_t \otimes x_v^*\right)\\
&= \sum_{n\in\sigma_1^{-1}(\{t\})} \mathfrak{h}_{t,v}^{n}\left(x_u \otimes x_{\sigma_2(n)}^*\right) + \sum_{n\in\sigma_2^{-1}(\{t\})} \mathfrak{h}_{u,t}^{n}\left(x_{\sigma_1(n)} \otimes x_v^*\right)\\
&= \sum_{n=1}^{t}\left\{\mathfrak{h}_{u,t}^{(t-1)^2+n} z_{\sigma^{-1}(n,v)} + \mathfrak{h}_{t,v}^{t^2-n+1} z_{\sigma^{-1}(u,n)}\right\} +\\
&\sum_{n=t}^{\infty}\left\{\mathfrak{h}_{u,t}^{n^2-t+1} z_{\sigma^{-1}(n,v)} + \mathfrak{h}_{t,v}^{n^2+t} z_{\sigma^{-1}(u,n+1)}\right\}
\end{aligned}
$$

Por (2.17) si $u, v, n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathfrak{h}_{u,v}^{n} = 0$ si $n \notin \sigma_1^{-1}(\{u\}) \cup \sigma_2^{-1}(\{v\})$.

Asimismo, evaluando $\mathfrak{h}_{u,v}^{\sigma^{-1}(u,v)}$ obtenemos

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{h}_{u,v}^{(v-1)^2+u} = \mathfrak{h}_{t,v}^{(v-1)^2+t} + \mathfrak{h}_{u,t}^{u^2-t+1} & si & t \leq u < v,\\
\mathfrak{h}_{u,v}^{(v-1)^2+u} = \mathfrak{h}_{t,v}^{(v-1)^2+t} + \mathfrak{h}_{u,t}^{(t-1)^2+u} & si & u < t < v,\\
\mathfrak{h}_{u,v}^{(v-1)^2+u} = \mathfrak{h}_{t,v}^{v^2-v+1} + \mathfrak{h}_{u,t}^{(t-1)^2+u} & si & u < v \leq t.
\end{array} \qquad (2.18)
$$

En particular, $\mathfrak{h}_{n,n}^{\sigma^{-1}(n,n)} = 0$ si $n \in \mathbb{N}$. De la misma forma,

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{h}_{t,u}^{(u-1)^2+t} + \mathfrak{h}_{u,t}^{u^2-t+1} = 0 & si & t < u = v,\\
\mathfrak{h}_{t,t}^{t^2-t+1} = 0 & si & t = u = v,\\
\mathfrak{h}_{t,u}^{t^2-u+1} + \mathfrak{h}_{u,t}^{(t-1)^2+u} = 0 & si & u = v < t.
\end{array} \qquad (2.19)
$$

Finalmente,

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{h}_{u,v}^{u^2-v+1} = \mathfrak{h}_{t,v}^{(v-1)^2+t} + \mathfrak{h}_{u,t}^{u^2-t+1} & si & t \leq v < u,\\
\mathfrak{h}_{u,v}^{u^2-v+1} = \mathfrak{h}_{t,v}^{t^2-v+1} + \mathfrak{h}_{u,t}^{u^2-t+1} & si & v < t \leq u,\\
\mathfrak{h}_{u,v}^{u^2-v+1} = \mathfrak{h}_{t,v}^{t^2-v+1} + \mathfrak{h}_{u,t}^{(t-1)^2+u} & si & v < u < t.
\end{array} \qquad (2.20)
$$

Consecuentemente, de (2.18), (2.19) y (2.20) deducimos que

$$
\mathfrak{h}_{u,v}^{\sigma^{-1}(u,v)} = \mathfrak{h}_{u,t}^{\sigma^{-1}(u,t)} + \mathfrak{h}_{t,v}^{\sigma^{-1}(t,v)} \qquad (2.21)
$$

si $u, v, t \in \mathbb{N}$. Por (2.21) podemos escribir

$$
\mathfrak{h}_{u,v}^{\sigma^{-1}(u,v)} = \mathfrak{h}_{u,1}^{\sigma^{-1}(u,1)} + \mathfrak{h}_{1,v}^{\sigma^{-1}(1,v)} = \mathfrak{h}_{u,1}^{\sigma^{-1}(u,1)} - \mathfrak{h}_{v,1}^{\sigma^{-1}(v,1)}. \qquad (2.22)
$$

Indiquemos

$$
\mathfrak{h}_n = \mathfrak{h}_{n,1}^{\sigma^{-1}(n,1)}, n \in \mathbb{N}. \qquad (2.23)
$$

Ahora para $n, u, v \in \mathbb{N}$, $n < u$, usando (2.17) obtenemos $\mathfrak{h}_{u,v}^{\sigma^{-1}(n,v)} = \mathfrak{h}_{u,t}^{(t-1)^2+n}$ si $n \leq t$ y $\mathfrak{h}_{u,v}^{\sigma^{-1}(n,v)} = \mathfrak{h}_{u,t}^{n^2-t+1}$ si $t < n$, i.e. $\mathfrak{h}_{u,v}^{\sigma^{-1}(n,v)} = \mathfrak{h}_{u,t}^{\sigma^{-1}(n,t)}$. La misma conclusión se verifica si $u < n$ y deducimos la existencia de sucesiones doblemente indexadas $\{\mathfrak{n}_u^p\}_{u,p\in\mathbb{N}}$, $\{\mathfrak{z}_v^q\}_{v,q\in\mathbb{N}}$ tales que $\mathfrak{n}_u^p = \mathfrak{h}_{u,n}^{\sigma^{-1}(p,n)}$ y $\mathfrak{z}_v^q = \mathfrak{h}_{n,v}^{\sigma^{-1}(n,q)}$ si $u, v, p, q, n \in \mathbb{N}$. En particular, sabemos que $\mathfrak{n}_n^n = \mathfrak{z}_n^n = 0$ si $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\delta\left(x_u \otimes x_v^*\right) = \mathfrak{h}_{u,v}^{\sigma^{-1}(u,v)} z_{\sigma^{-1}(u,v)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathfrak{n}_u^n \cdot z_{\sigma^{-1}(n,v)} + \mathfrak{z}_v^n \cdot z_{\sigma^{-1}(u,n)}\right). \qquad (2.24)$$

Como

$$\delta_{u,v}\, \delta\left(x_u \otimes x_v^*\right) = \delta\left(x_u \otimes x_v^*\right)\left(x_u \otimes x_v^*\right) + \left(x_u \otimes x_v^*\right)\delta\left(x_u \otimes x_v^*\right)$$

escribimos

$$\begin{aligned}\delta_{u,v}\, \delta\left(x_u \otimes x_v^*\right) = \delta_{u,v} &\left[2\mathfrak{h}_{u,v}^{\sigma^{-1}(u,v)} z_{\sigma^{-1}(u,v)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathfrak{n}_u^n \cdot z_{\sigma^{-1}(n,v)} + \mathfrak{z}_v^n \cdot z_{\sigma^{-1}(u,n)}\right)\right] \\ &+ \left(\mathfrak{n}_u^v + \mathfrak{z}_v^n\right)\left(x_u \otimes x_v^*\right),\end{aligned}$$

i.e. $\mathfrak{n}_u^v + \mathfrak{z}_v^n = 0$ si $u \neq v$ en $\mathbb{N}$.

Finalmente (2.16) se sigue de (2.22), (2.23) y (2.24). ■

**Observación 2.6.5.** De la prueba del Teorema 2.6.4 es fácil ver que $\mathfrak{n}_n^m = \delta_{n,m}\left\langle \delta\left(z_{n^2}\right), z_{m^2}^*\right\rangle$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$.

**Corolario 2.6.6.** *Dado* $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$ *sea* $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n z_n$ *en* $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$. *Entonces*

$$\mathfrak{h}\left[ad_v\right] = \{v_{n^2-n+1} - v_1\}_{n=1}^{\infty} \text{ y } \mathfrak{n}_n^m\left[ad_v\right] = \begin{cases} v_{m^2-n+1} & si \quad 1 \leq n < m, \\ v_{(n-1)^2+m} & si \qquad n > m. \end{cases}$$

**Definición 2.6.7.** Una derivación acotada $\delta$ sobre $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ es derivación de Hadamard si hay alguna base shrinking de $X$ tal que la correspondiente sucesión $\mathfrak{n}[\delta]$ es nula. Indicamos $\mathcal{D}_H(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ a la clase de derivaciones de Hadamard sobre $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$.

**Observación 2.6.8.** Fijada una base shrinking $\mathcal{X} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ indicaremos la clase de derivaciones de Hadamard sobre $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ respecto a $\mathcal{X}$ como $\mathcal{D}_X(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$. Notemos que $\mathcal{D}_H(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ consiste de la unión de estas clases. Más información sobre este particular la da el siguiente teorema:

**Teorema 2.6.9.** *(cf. [4]) Sea $X$ un espacio de Banach con una base shrinking $\mathcal{X} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ la base inducida de $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ como en la Proposición 2.6.1. Entonces*

**i)** *$\mathcal{D}_X(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ es un subespacio de Banach de $\mathcal{D}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$*

**ii)** *$\mathcal{D}_X(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) \hookrightarrow M\left(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, es decir, existe un isomorfismo isométrico desde el espacio de las derivaciones $X-$Hadamard en el espacio de Banach de multiplicadores de $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ en la base $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$*

**iii)** *El espacio de Banach $\mathcal{D}_X(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ es complementable.*

***Demostración.***

**i)** Observemos que

$$\mathcal{D}_X(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\delta \in \mathcal{D}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) : \delta\left(z_{\sigma^{-1}(n,n)}\right) = 0\right\}$$

**ii)** Por Teorema 2.6.4 dada $\delta \in \mathcal{D}_X(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ podemos escribir

$$\delta(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathfrak{h}_{\sigma_1(n)} - \mathfrak{h}_{\sigma_2(n)}\right) \langle \nu, z_m^* \rangle .z_n \tag{2.25}$$

con $\upsilon \in X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$. Así la sucesión $\mathfrak{h}_\delta = \left\{\mathfrak{h}_{\sigma_1(n)} - \mathfrak{h}_{\sigma_2(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es un multiplicador de $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$. En efecto, por 2.25 tenemos que $\delta = M_{\mathfrak{h}_\delta}$, donde $M$ es el isomorfismo isométrico algebraico usual (cf. [60]) de $M\left(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ en $\mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ dado por

$$M\left(\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\right)(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \nu, z_n^* \rangle .z_n$$

si $\upsilon \in X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$.

**iii)** Sea $\mathcal{D}_X^{\perp}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ el conjunto de derivaciones acotadas sobre $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ con $\mathfrak{h}-$sucesiones nulas. Como

$$\mathcal{D}_X^{\perp}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\delta \in \mathcal{D}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) : \langle \delta(z_{n^2}), z_{n^2}^* \rangle = 0\right\}$$

deducimos que $\mathcal{D}_X^{\perp}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ es un espacio de Banach y por Teorema 2.6.4 tenemos que

$$\mathcal{D}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) = \mathcal{D}_X(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) + \mathcal{D}_X^{\perp}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$$

Luego es inmediato que $\mathcal{D}_X(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) \cap \mathcal{D}_X^{\perp}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*) = \{0\}$ .

■

**Lema 2.6.10.** *(cf. [34])*

**(i)** *Si $r, s \in \mathbb{N}$ resulta*

$$\mathfrak{h}\left[\delta_{x_r \odot x_s^*}\right] = \begin{cases} \{0, -1, -1, ...\} & if \quad r = s = 1, \\ \{0, 0, ...\} & if \quad r \neq s, \\ e_r & if \quad r = s > 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

**(ii)** *Si $r \neq s$ entonces $\mathfrak{n}\left[\delta_{x_r \odot x_s^*}\right] = e_s^r$ es la matriz nula en todas las entradas y con solo un $1$ en el lugar $(s, r)$. En particular, las derivaciones $\delta_{x_n \odot x_n^*}$ con $n \in \mathbb{N}$ son derivaciones del tipo Hadamard.*

***Demostración.***

**(i)** Si $r, s, n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{x_r \odot x_s^*}\left(x_n \otimes x_m^*\right) &= \left(x_r \odot x_s^*\right)\left(x_n\right) \otimes x_m^* - x_n \otimes \left(x_r \odot x_s^*\right)^*\left(x_m^*\right) \\ &= \left[\langle x_n, x_s^* \rangle\, x_r\right] \otimes x_m^* - x_n \otimes \left[\langle x_r, x_m^* \rangle \cdot x_s^*\right] \\ &= \delta_s^n \cdot \left(x_r \otimes x_m^*\right) - \delta_r^m \cdot \left(x_n \otimes x_s^*\right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Haciendo $m = 1$ in (2.27) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_{x_r \odot x_s^*}\left(x_n \otimes x_1^*\right) &= \sum_{p=1}^{\infty} \mathfrak{h}_{n,1}^p \cdot z_p \\ &= \delta_s^n \cdot \left(x_r \otimes x_1^*\right) - \delta_r^1 \cdot \left(x_n \otimes x_s^*\right) \\ &= \delta_s^n \cdot z_{r^2} - \delta_r^1 \cdot z_{\sigma^{-1}(n,s)}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Si $r = s = 1$ por (2.28) es $\delta_{x_1 \odot x_1^*}\left(x_n \otimes x_1^*\right) = \delta_1^n \cdot z_1 - z_{n^2}$ y la afirmación se verifica. Si $r = s > 1$ por (2.28) es $\delta_{x_r \odot x_r^*}\left(x_n \otimes x_1^*\right) = \delta_r^n \cdot z_{r^2}$ y sigue la afirmación. Finalmente, si $r \neq s = n$ entonces (2.28) resulta

$$\delta_{x_r \odot x_s^*}\left(x_s \otimes x_1^*\right) = z_{r^2} - \delta_r^1 \cdot z_{s^2 - s + 1}$$

y claramente $\mathfrak{h}_s\left[\delta_{x_r \odot x_s^*}\right] = 0$. Si $s \notin \{r, n\}$ entonces $\delta_{x_r \odot x_s^*}\left(x_n \otimes x_1^*\right) = -\delta_r^1 \cdot z_{\sigma^{-1}(n,s)}$. Pero $\sigma^{-1}(n, s) = n^2$ sí y sólo si $s = 1$ y como $r \neq s$ entonces $\mathfrak{h}_n\left[\delta_{x_r \odot x_s^*}\right] = 0$.

**(ii)** Si $r, s, n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$ entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_n^m \left[\delta_{x_r \odot x_s^*}\right] &= \langle \delta_X \left(x_r \odot x_s^*\right) \left(z_{n^2}\right), z_{m^2}^* \rangle \\ &= \langle \delta_X \left(x_r \odot x_s^*\right) \left(x_n \otimes x_1^*\right), x_m^* \otimes x_1 \rangle \\ &= \langle \delta_s^n \cdot \left(x_r \otimes x_1^*\right) - x_n \otimes \left(x_r \odot x_s^*\right)^* \left(x_1^*\right), x_m^* \otimes x_1 \rangle \\ &= \delta_s^n \cdot \delta_r^m.\end{aligned}$$

■

**Proposición 2.6.11.** *(cf. [34]) Sean $X$ espacio de Banach, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ base shrinking doblemente acotada de $X$ (i.e. tanto $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ como $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ son acotadas). Dada una sucesión $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ de números complejos la serie $\sum_{n=1}^\infty c_n \cdot \delta_{x_n \odot x_n^*} = 0$ en $\mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ si y solo si $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Dado un tensor básico $x \otimes x^* \in X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ y $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^m \delta_{x_n \odot x_n^*}\right) (x \otimes x^*) &= \sum_{n=1}^m \left[\langle x, x_n^* \rangle (x_n \otimes x^*) - \langle x_n, x^* \rangle (x \otimes x_n^*)\right] \\ &= \left(\sum_{n=1}^m \langle x, x_n^* \rangle x_n\right) \otimes x^* - x \otimes \left(\sum_{n=1}^m \langle x_n, x^* \rangle x_n^*\right)\end{aligned}$$

y $\lim_{m \to 0} \left(\sum_{n=1}^m \delta_{x_n \odot x_n^*}\right) (x \otimes x^*) \equiv 0$. De todos modos, por la hipótesis impuesta a la base $\inf_{n,p \in \mathbb{N}} \|x_n\| \left\|x_p^*\right\| > 0$ (cf. [54], Corollary 3.1, p. 20). En consecuencia, si $n, m, p \in \mathbb{N}$ y $n \neq p$ entonces

$$\begin{aligned}\left\|\delta_{x_n \odot x_m^*}\right\| &\geq \left\|\delta_{x_n \odot x_m^*} \left(\frac{x_m}{\|x_m\|} \otimes \frac{x_p^*}{\left\|x_p^*\right\|}\right)\right\|_\wedge \\ &= \frac{\|x_n\|}{\|x_m\|} \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| / \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_m\| > 0,\end{aligned}$$

i.e. la serie $\sum_{n=1}^\infty \delta_{x_n \odot x_n^*}$ no es convergente. En el caso general, la afirmación es inmediata si la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ es nula salvo finitos $n$'s. Sino, dados $r$, $s$ enteros positivos tendremos

$$\left[\sum_{n=1}^\infty c_n \cdot \delta_{x_n \odot x_n^*}\right] (x_r \otimes x_s^*) = (c_r - c_s) (x_r \otimes x_s^*) = 0,$$

i.e. $c_r = c_s$ y por lo anterior $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ debe ser la sucesión constante nula. □

**Proposición 2.6.12.** *Sean $X$ espacio de Banach, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ base shrinking doblemente acotada de $X$. Si la serie $\sum_{n=1}^\infty c_n \cdot \delta_{x_n \odot x_n^*}$ converge en $\mathcal{B}(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ para cierta sucesión infinita de escalares $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ entonces $\{c_n\}_{n=1}^\infty \in c_0$.*

***Demostración.*** Como en la Prop. 2.6.11 basta observar que por la doble acotación de la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ resulta $\inf_{n\in\mathbb{N}} \left\|\delta_{x_n \odot x_n^*}\right\| > 0$. ■

**Teorema 2.6.13.** *Cada derivación de tipo Hadamard es una $\mathcal{B}$-derivación.*

***Demostración.*** Dada $\delta \in \mathcal{D}_H(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$ sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ base shrinking de $X$ tal que la sucesión $\mathfrak{n}[\delta]$ es nula. Dado $x \in F$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n^*\rangle \cdot \mathfrak{h}_n[\delta] \cdot x_n$ converge. En efecto, si $p, q \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left\|\sum_{n=p}^{p+q} \langle x, x_n^*\rangle \cdot \mathfrak{h}_n[\delta] \cdot x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=p}^{p+q} \langle x, x_n^*\rangle \cdot (\mathfrak{h}_n[\delta] - \mathfrak{h}_1[\delta]) \cdot x_n\right\| + \left\|\mathfrak{h}_1[\delta] \sum_{n=p}^{p+q} \langle x, x_n^*\rangle \cdot x_n\right\| \tag{2.29}$$

$$= \left\|\delta\left[\left(\sum_{n=p}^{p+q} \langle x, x_n^*\rangle \cdot x_n\right) \otimes \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|}\right]\right\|_{\wedge} + \left\|\mathfrak{h}_1[\delta] \sum_{n=p}^{p+q} \langle x, x_n^*\rangle \cdot x_n\right\|$$

$$\leq (\|\delta\| + |\mathfrak{h}_1[\delta]|) \left\|\sum_{n=p}^{p+q} \langle x, x_n^*\rangle \cdot x_n\right\|$$

i.e. la correspondiente sucesión de sumas parciales es una sucesión de Cauchy. Queda definido un operador lineal $\mathrm{M}_{\mathfrak{h}[\delta]} : x \to \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n^*\rangle \cdot \mathfrak{h}_n[\delta] \cdot x_n$, el que es acotado como consecuencia del Teorema de Banach-Steinhauss. Así $\mathfrak{h}[\delta] \in \mathrm{M}(X, \{x_n\}_{n=1}^{\infty})$, i.e. $\mathfrak{h}[\delta]$ es un *multiplicador*[10] de $X$ relativo a la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (V. [54], Ch. I, §5, p. 40). Más aún, si $x^* \in X^*$ se tiene

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{h}[\delta]}^*(x^*) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x_m, x^*\rangle \cdot \mathfrak{h}_m[\delta] \cdot x_m^*,$$

donde la convergencia de la serie sigue en forma análoga a (4.44), y $\mathfrak{h}[\delta] \in \mathrm{M}(X^*, \{x_m^*\}_{m=1}^{\infty})$.

[10]Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se asume base de $X$ una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares es *multiplicador de un elemento* $x \in X$ si existe $x_{\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}} \in X$, necesariamente único, tal que $x_{\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, x_n^*\rangle x_n$. La sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *multiplicador de $X$ respecto a la base* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ si es multiplicador de cada elemento de $X$. Indicamos $\mathrm{M}(X, \{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ al conjunto de multiplicadores de $X$ respecto a la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Con la estructura natural de espacio vectorial complejo, la multiplicación coordenada a coordenada y la norma

$$\|\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathrm{M}(X,\{x_n\}_{n=1}^{\infty})} \triangleq \sup_{\|x\|\leq 1} \left\|x_{\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}}\right\|$$

el conjunto $\mathrm{M}(X, \{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ es un álgebra de Banach abeliana con unidad $1 = \{1, 1, 1, ...\}$ (Cf. [54], Ch. I, §5, Prop. 5.4; [60]).

Finalmente, si $x \otimes x^*$ es un tensor básico fijo en $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\delta\left(x \otimes x^*\right) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\langle x, x_m^* \right\rangle \left\langle x_n, x^* \right\rangle \delta\left(x_m \otimes x_n^*\right) \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\langle x, x_m^* \right\rangle \left\langle x_n, x^* \right\rangle \delta\left(z_{\sigma^{-1}(m,n)}\right) \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\langle x, x_m^* \right\rangle \left\langle x_n, x^* \right\rangle (\mathfrak{h}_m[\delta] - \mathfrak{h}_n[\delta]) z_{\sigma^{-1}(m,n)} \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\langle x, x_m^* \right\rangle \left\langle x_n, x^* \right\rangle (\mathfrak{h}_m[\delta] - \mathfrak{h}_n[\delta]) \left(x_m \otimes x_n^*\right) \\
&= \mathrm{M}_{\mathfrak{h}[\delta]}(x) \otimes x^* - x \otimes \mathrm{M}^*_{\mathfrak{h}[\delta]}(x^*)
\end{aligned}
$$

y podemos concluir que $\delta = \delta_{\mathrm{M}_{\mathfrak{h}[\delta]}}$. ■

**Proposición 2.6.14.** *(cf. [34]) Sean $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ base shrinking doblemente acotada de $X$ tal que $\delta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \delta_{x_n \odot x_n^*}$ define una derivación del tipo Hadamard.*

**(i)** $\mathfrak{h}[\delta] \in c$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$ *y* $c_m = \mathfrak{h}_m[\delta] - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{h}_n[\delta]$ *si* $m \in \mathbb{N}$.

**(ii)** $\delta = \delta_T$, *donde* $T \in \mathcal{B}(X)$ *está definido para* $x \in X$ *mediante*

$$
T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{h}_n[\delta] \cdot \left\langle x, x_n^* \right\rangle \cdot x_n - x \cdot \lim_{n\to\infty} \mathfrak{h}_n[\delta]
$$

***Demostración.***

**(i)** Si $m \in \mathbb{N}$ resulta $\delta\left(x_m \otimes x_1^*\right) = (c_m - c_1) \cdot z_{m^2}$. Así $\mathfrak{h}_1[\delta] = 0$ y $\mathfrak{h}_m[\delta] = c_m - c_1$ si $m > 1$. Por la Prop. (2.6.12) tenemos que $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$ y sigue enseguida la afirmación.

**(ii)** Como $\mathfrak{h}[\delta] \in c$ es claro que $T$ es operador lineal acotado sobre $X$ y resulta

$$
T^*(x^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{h}_n[\delta] \cdot \left\langle x_n, x^* \right\rangle \cdot x_n - x^* \cdot \lim_{n\to\infty} \mathfrak{h}_n[\delta]
$$

para cada $x^* \in X^*$. Más aún, si $n, m \in \mathbb{N}$ por (i) tenemos

$$
\begin{aligned}
\delta_T\left(x_n \otimes x_m^*\right) &= ((\mathfrak{h}_n[\delta] - \lim_{k\to\infty} \mathfrak{h}_k[\delta]) x_n) \otimes x_m^* - x_n \otimes ((\mathfrak{h}_m[\delta] - \lim_{k\to\infty} \mathfrak{h}_k[\delta]) x_m^*) \\
&= (\mathfrak{h}_n[\delta] - \mathfrak{h}_m[\delta]) \cdot \left(x_n \otimes x_m^*\right) \\
&= (c_n - c_m) \cdot \left(x_n \otimes x_m^*\right) \\
&= \delta\left(x_n \otimes x_m^*\right),
\end{aligned}
$$

i.e. $\delta = \delta_T$.

■

**Proposición 2.6.15.** *Sea* $\{\mathfrak{h}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{M}(X, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \cap \mathrm{M}(X^*, \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}) \cap c$ *tal que* $\mathfrak{h}_1 = 0$. *Si escribimos* $\mathfrak{h}_0 \triangleq \lim_{n\to\infty} \mathfrak{h}_n$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_0) \cdot \delta_{x_n \odot x_n^*}$ *converge a una derivación de tipo Hadamard* $\delta$ *sobre* $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ *tal que* $\mathfrak{h}[\delta] = \{\mathfrak{h}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

***Demostración.*** Si $S = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{h}_k - \mathfrak{h}_0) \cdot x_k \odot x_k^*$ entonces $S \in \mathcal{B}(X)$ y

$$\|S\| \leq \|\{\mathfrak{h}_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathrm{M}\left(F, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right)} + |\mathfrak{h}_0|.$$

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\mathfrak{h}_k - \mathfrak{h}_0) \cdot x_k \odot x_k^*$, $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in X$ la sucesión $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge debido a que $\{\mathfrak{h}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un multiplicador de $X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base shrinking de $X$. Así $\{\|S_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ deviene acotada en virtud del principio de acotación uniforme. Ahora, si fijamos un tensor elemental $x \otimes x^* \in X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\|(\delta_{S_n} - \delta_S)(x \otimes x^*)\|_{\wedge} = \left\| \sum_{k>n} (\mathfrak{h}_k - \mathfrak{h}_0) \cdot \langle x, x_k^* \rangle \cdot x_k \otimes x^* - x \otimes \sum_{k>n} (\mathfrak{h}_k - \mathfrak{h}_0) \cdot \langle x_k, x^* \rangle \cdot x_k^* \right\|_{\wedge} \tag{2.30}$$

$$\leq \left\| \sum_{k>n} (\mathfrak{h}_k - \mathfrak{h}_0) \cdot \langle x, x_k^* \rangle \cdot x_k \right\| \|x^*\| + \|x\| \left\| \sum_{k>n} (\mathfrak{h}_k - \mathfrak{h}_0) \cdot \langle x_k, x^* \rangle \cdot x_k^* \right\|.$$

Como $\{\mathfrak{h}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{M}(X, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \cap \mathrm{M}(X^*, \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty})$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base shrinking por (2.30) vemos que $\lim_{n\to\infty} (\delta_{S_n} - \delta_S)(x \otimes x^*) = 0$. En efecto, como $X \otimes X^*$ es denso en $X \overset{\wedge}{\otimes} X^*$, $\{\|S_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y $\|\delta_T\| \leq 2\|T\|$ si $T \in \mathcal{B}(X)$ resulta $\delta_S = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_0) \cdot \delta_{x_n \odot x_n^*}$ y basta considerar la Prop. 2.6.14. ■

# Capítulo 3

# $\mathcal{B}$-Derivaciones

En este capítulo seguiremos considerando un espacio de Banach $X$ provisto de una base shrinking, y mantendremos en general la notación anterior. Introducimos en la Sección 2.6 la clase $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(X)$ de *$\mathcal{B}$-derivaciones* de $X$. Por ejemplo, dado $(x, x^*) \in X \times X^*$ es fácil ver que

$$\delta_X (x \odot x^*) = (x \odot x^*) \otimes Id_{X^*} - Id_X \otimes (x^* \odot \iota_X (x)) = ad_{x \odot x^*},$$

de donde $\delta_X (\mathcal{F}(X)) \subseteq \mathcal{N}^1(X \overset{\wedge}{\otimes} X^*)$. En el Teorema (3.2.1) se establecerá la relación precisa entre $\mathcal{B}$-derivaciones y tensores que puedan implementarlas en cuanto derivaciones internas. Este resultado se aplica a los espacios $c_0$ y $l^p$, $p > 1$, dotados con la base natural y además al espacio $L^p ([0,1]), p > 1$, provisto con la base de Haar. Si $X$ no posee una base shrinking los resultados anteriores generalmente no son ciertos. En el Teorema (3.3.1) explicitaremos una solución completa del problema cuando $X = l^1 (\mathbb{N})$.

## 3.1. Sobre el núcleo del operador $\delta_X$.

**Lema 3.1.1.** *(cf. [34])* $\ker (\delta_X) = \mathbb{C} \cdot \operatorname{Id}_X$ .

***Demostración.*** La inclusión $\supseteq$ es evidente.

Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\delta_T = 0$ y sea $\lambda \in \sigma(T)$ . Si $\lambda$ pertenece al espectro de compresión de $T$ sea $x^* \in X^* - \{0\}$ tal que $x^* \mid_{\mathrm{R}(T - \lambda \operatorname{Id}_X)} \equiv 0$. Para todo $x \in X$ tenemos

$$\langle x, T^* (x^*) \rangle = \langle T (x), x^* \rangle = \langle \lambda x, x^* \rangle = \langle x, \lambda x^* \rangle ,$$

i.e. $(T^* - \lambda \operatorname{Id}_{X^*}) (x^*) = 0$. Más aún, como

$$(T (x) - \lambda x) \otimes x^* = x \otimes (T^* (x^*) - \lambda x^*) = 0,$$

la norma proyectiva es una norma cruzada y $x^* \neq 0$ entonces $T = \lambda \operatorname{Id}_X$ .

Si $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ podemos elegir una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores unitarios de $X$ tal que $T(y_n) - \lambda y_n \to 0$. Si $y^* \in X^*$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \|(T(y_n) - \lambda y_n) \otimes y^*\|_{\wedge} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|y_n \otimes T^*(y^*) - \lambda y^*\|_{\wedge} = \|T^*(y^*) - \lambda y^*\|. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $T = \lambda\, \mathrm{Id}_X$. ■

## 3.2. $\mathcal{B}$-derivaciones y derivaciones internas

**Teorema 3.2.1.** *(cf. [36]) Sean $X$ un espacio de Banach con una base shrinking $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\delta_X(T) \in \mathcal{N}^1(\mathcal{U})$ y sea $u \in \mathcal{U}$ tal que $\delta_X(T) = ad_u$. Escribiendo $u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m z_m$ si $n, m \in \mathbb{N}$ resulta*

$$\langle T(x_n), x_m^*\rangle = \begin{cases} u_{m^2-n+1} & if \quad n < m, \\ 0 & if \quad n = m, \\ u_{(n-1)^2+m} & if \quad n > m. \end{cases}$$

***Demostración.*** Si $m \in \mathbb{N}$ existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n-1)^2 < m \leq n^2$. Con la notación de la Prop. 2.6.1 es fácil ver que $z_m = x_{\sigma_1(m)} \otimes x^*_{\sigma_2(m)}$. Por ([4], Prop. 6, p. 203), dados $r, s \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} ad_u(x_r \otimes x_s^*) &= \sum_{m\in\sigma_2^{-1}(\{r\})} u_m \left(x_{\sigma_1(m)} \otimes x_s^*\right) - \sum_{m\in\sigma_1^{-1}(s)} u_m \left(x_r \otimes x^*_{\sigma_2(m)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} u_{(r-1)^2+i}(x_i \otimes x_s^*) + \sum_{i=r+1}^{\infty} u_{i^2-r+1}(x_i \otimes x_s^*) \\ &- \sum_{i=1}^{s} u_{s^2-i+1}(x_r \otimes x_i^*) - \sum_{i=s}^{\infty} u_{i^2+s}\left(x_r \otimes x_{i+1}^*\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

i.e.

$$\delta_X(T)(x_r \otimes x_s^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle T(x_r), x_i^*\rangle (x_i \otimes x_s^*) - \langle T(x_i), x_s^*\rangle (x_r \otimes x_i^*)\right] \tag{3.2}$$

En particular, si $r = s$ observamos que el r-ésimo sumando de la primer suma y el s-ésimo sumando de la tercer suma de (3.1) son iguales. Así, las cuatros sumas de (3.1) interesan subconjuntos mutuamente disjuntos de la base $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. El resultado ahora se sigue comparando los coeficientes de (3.1) y (3.2). ■

**Ejemplo 3.2.1.** (cf. [36]) Sea $X \triangleq c_0(\mathbb{N})$ el subespacio de Banach usual de $l^\infty(\mathbb{N})$ de sucesiones complejas sobre $\mathbb{N}$ que convergen a cero. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \triangleq \{\delta_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base shrinking de $X$. En efecto, $X^*$ es isomorfo isométricamente a $l^1(\mathbb{N})$ y $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es identificada con la base estandar de $l^1(\mathbb{N})$. Cualquier $T \in \mathcal{B}(X)$ es determinado con respecto a la base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por una única matriz compleja $\{a_{m,n}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ cuyas columnas pertenecen a $X$, sus filas están uniformemente acotadas en $l^1(\mathbb{N})$ y $T(z) = \{\sum_{n=1}^\infty a_{m,n}z_n\}_{m=1}^\infty$ si $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$. Sea $S \in \mathcal{B}(X)$ el operador shift, es decir, $S(\{\alpha_1,\alpha_2,...\}) \triangleq \{0,\alpha_1,\alpha_2,...\}$ si $\alpha \in X$. Entonces $D_S \notin \mathcal{N}^1(c_0(\mathbb{N}) \hat{\otimes} l^1(\mathbb{N}))$. Si $D_S = ad_u$ para algún $u \in c_0(\mathbb{N})\hat{\otimes} l^1(\mathbb{N})$ escribimos $u = \sum_{m=1}^\infty u_m z_m$, donde $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ es la base del producto tensorial asociada a la base estandar de $X$. Por (Teorema 3.2.1) vemos que $u_{n^2+n+2} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que contradice el hecho de que $u_m \to 0$. Ahora, sea $T \in \mathcal{B}(X)$, $T(\alpha) \triangleq \{\sum_{n=1}^\infty \alpha_{m+n-1}/2^n\}_{m\in\mathbb{N}}$ para $\alpha \in X$. Entonces $D(T) = ad_v$, donde $v \triangleq \sum_{n=1}^\infty(\sum_{m=1}^n 2^{-n+m-1}x_k) \otimes x_n^*$.

## 3.3. $\mathcal{B}$-derivaciones sobre $l^1(\mathbb{N})$

**Teorema 3.3.1.** *(cf. [36]) Sea $T \in \mathcal{B}(l^1(\mathbb{N}))$ realizado por una matriz compleja infinita $a \triangleq \{a_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ con respecto a la base usual $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $e_n \triangleq \{\delta_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ si $n \in \mathbb{N}$.*[1] *Entonces,*

**(i)** *El subespacio lineal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{U} \triangleq l^1(\mathbb{N})\hat{\otimes} l^\infty(\mathbb{N})$ generado por $\cup_{n=1}^\infty e_n \otimes l^\infty(\mathbb{N})$ es denso en $\mathcal{U}$.*

**(ii)** *Sea $s = \sum_{n=1}^\infty e_n \otimes x_n^*$, con $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$. Si $s = 0$ entonces $x_n^* = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**(iii)** *Sea $\delta(T) \in \mathcal{B}(l^1(l^\infty(\mathbb{N})))$ tal que*

$$\delta(T)(x^*) \triangleq \left\{\left\{\sum_{n=1}^\infty \left(a_{m,n}x_{n,k}^* - a_{n,k}x_{m,n}^*\right)\right\}_{k=1}^\infty\right\}_{m=1}^\infty, \ x^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N})). \quad (3.3)$$

*Entonces $\delta(T)$ esta bien definido y $\delta$ es un operador lineal acotado sobre $l^1(\mathbb{N})$ con valores en $\mathcal{B}(l^1(l^\infty(\mathbb{N})))$.*

**(iv)** *Si $x^*, y^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ sea $x^* \cdot y^* \triangleq \left\{\sum_{n=1}^\infty x_{m,n}^* y_n^*\right\}_{m=1}^\infty$. Así $l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ es un álgebra de Banach asociativa.*

[1] Es decir, las filas de $a$ están uniformemente acotadas en $l^1(\mathbb{N})$ y dado $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $l^1(\mathbb{N})$ resulta $T(z) = \{\sum_{n=1}^\infty a_{m,n}z_n\}_{m=1}^\infty$ .(cf.[28]; [32], Teorema. 2.13(ii)).

**(v)** *Dado $x^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ sea $s_{x^*} \triangleq \sum_{n=1}^\infty e_n \otimes x_n^*$ en $\mathcal{U}$. Entonces*

$$\delta_{l^1(\mathbb{N})}(s_{x^*}) = \sum_{m=1}^\infty e_m \otimes \delta_m(T)(x^*). \tag{3.4}$$

**(vi)** $\delta(T) \in \mathcal{Z}^1(l^1(l^\infty(\mathbb{N})))$.

**(vii)** *Si $z^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$, $ad_{z^*} = 0$ si y sólo si $z^* = 0$.*

**(viii)** $\delta(T) \in \mathcal{N}^1(l^1(l^\infty(\mathbb{N})))$ *si y solo si* $a^* \triangleq \left\{\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty\right\}_{m=1}^\infty \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$.

***Demostración.***

**(i)** Como el conjunto $l^1(\mathbb{N}) \otimes l^\infty(\mathbb{N})$ es denso en $\mathcal{U}$ es suficiente probar que un producto tensorial básico puede ser aproximado por elementos de $S$. Dado un tensor básico $x \otimes x^* \in l^1(\mathbb{N}) \otimes l^\infty(\mathbb{N})$ podemos escribir $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ para una única sucesión compleja $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Por la continuidad de la aplicación $x \to x \otimes x^*$ de $l^1(\mathbb{N})$ en $\mathcal{U}$ y usando la bilinearidad del producto tensorial tenemos que

$$x \otimes x^* = (\sum_{n=1}^\infty x_n e_n) \otimes x^* = \sum_{n=1}^\infty e_n \otimes (x_n x^*).$$

**(ii)** Dado $\beta \in l^\infty(\mathbb{N})$ y una biyección $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ escribimos

$$B_{\beta,j}(x, x^*) \triangleq \sum_{n=1}^\infty \beta_n x_n x_{j(n)}^*$$

para $x \in l^1(\mathbb{N})$ y $x^* \in l^\infty(\mathbb{N})$. Así $B_{\beta,j}$ es una forma bilineal acotada sobre $l^1(\mathbb{N}) \times l^\infty(\mathbb{N})$ y existe una única $\widetilde{B}_{\beta,j} \in \mathcal{U}^*$ tal que

$$0 = \widetilde{B}_{\beta,j}(s) = \sum_{n=1}^\infty B_{\beta,j}(e_n, x_n^*) = \sum_{n=1}^\infty \beta_n x_{j(n)}^*.$$

Ahora la conclusión es inmediata.

**(iii)** Como $l^1(\mathbb{N})^* \approx l^\infty(\mathbb{N})$ es sencillo ver que las columnas de la matriz $\{a_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ están uniformemente acotadas en $l^1(\mathbb{N})$ y que $T^*(x^*) = \{\sum_{n=1}^\infty a_{n,m} x_n^*\}_{m=1}^\infty$ para todo $x^* \in l^\infty(\mathbb{N})$. Más aún,

$$\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^\infty |a_{n,m}| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^\infty |a_{n,m}|.$$

Sean $x^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ y $m, k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}|\delta_m(T)(x^*)(k)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{m,n}x^*_{n,k} - a_{n,k}x^*_{m,n}\right)\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|\,\|x^*_n\|_\infty + \|T\|\,\|x^*_m\|_\infty,\end{aligned}$$

o sea $\delta_m(T)(x^*) \in l^\infty(\mathbb{N})$ y

$$\|\delta_m(T)(x^*)\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|\,\|x^*_n\|_\infty + \|T\|\,\|x^*_m\|_\infty.$$

Además, si $M \in \mathbb{N}$ entonces

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M}\|\delta_m(T)(x^*)\|_\infty &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x^*_n\|_\infty \sum_{m=1}^{M}|a_{m,n}| + \|T\|\,\|x^*\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))} \\ &\leq 2\,\|T\|\,\|x^*\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))}.\end{aligned}$$

Haciendo $M \to \infty$ vemos que $\delta(T)(x^*) \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ y

$$\|\delta(T)(x^*)\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))} \leq 2\,\|T\|\,\|x^*\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))}.$$

En efecto, $\delta(T) \in \mathcal{B}(l^1(l^\infty(\mathbb{N})))$ y $\|\delta(T)\| \leq 2\,\|T\|$. Además, $\delta$ es un operador lineal acotado sobre $l^1(\mathbb{N})$ con valores en $\mathcal{B}(l^1(l^\infty(\mathbb{N})))$.

**(iv)** Es inmediato.

**(v)** Tenemos que

$$\begin{aligned}\delta_{l^1(\mathbb{N})}(s_{x^*}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[T(e_n)\otimes x^*_n - e_n \otimes T^*(x^*_n)\right] \qquad (3.5)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}e_m\right)\otimes x^*_n - e_n \otimes \left\{\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,k}x^*_{n,m}\right\}_{k=1}^{\infty}\right]\end{aligned}$$

Si $N, M \in \mathbb{N}$ vemos que

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}|a_{m,n}|\,\|x^*_n\|_\infty \leq \|T\|\sum_{n=1}^{\infty}\|x^*_n\|_\infty < +\infty,$$

y $\{a_{m,n}(e_m \otimes x^*_n)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ deviene incondicionalmente convergente en $\mathcal{U}$.

Así, por (3.5) podemos escribir

$$\begin{aligned}\delta_{l^1(\mathbb{N})}(s_{x^*}) &= \sum_{m=1}^{\infty} e_m \otimes \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}x_n^* - \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}x_{m,n}^*\right\}_{k=1}^{\infty}\right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} e_m \otimes \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{m,n}x_{n,k}^* - a_{n,k}x_{m,n}^*\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} e_m \otimes \delta_m(T)(x^*).\end{aligned}$$

**(vi)** Sea $x^*, y^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} e_m \otimes \delta_m(T)(x^* \cdot y^*) &= D_T(s_{x^*} \cdot s_{y^*}) \\ &= D_T(s_{x^*}) \cdot s_{y^*} + s_{x^*} \cdot D_T(y^*) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} e_m \otimes \left(\delta_m(T)(x^*) \cdot y^* + x^* \cdot \delta_m(T)(y^*)\right)\end{aligned}$$

y por (ii) $\delta(T) \in \mathcal{Z}^1(l^1(l^\infty(\mathbb{N})))$.

**(vii)** Sea $z^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ de modo que $ad_{z^*} = 0$. Si $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$ad_{z^*}(\{0, ..., 0, e_n^*, 0, ...\}) = \left\{z_{m,n}^* e_n^*\right\}_{m=1}^{\infty} - \{0, ..., 0, z_n^*, 0, ...\} \tag{3.6}$$

y $z_{m,n}^* = 0$ cuando $m \neq n$ en $\mathbb{N}$. Como $x^* \cdot z^* = z^* \cdot x^*$ para todo $x^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ entonces $z_{m,m}^* x_{m,n}^* = x_{m,n}^* z_{n,n}^*$ si $m, n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente $z_{n,n}^* = z_{m,m}^*$ y como $\|z_m^*\|_\infty \to 0$ entonces $z^* = 0$.

**(viii)** Supongamos que $\delta(T) \in \mathcal{N}^1(l^1(l^\infty(\mathbb{N})))$. Por (vi) existe un único $z^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ tal que $\delta(T) = ad_{z^*}$. Por 3.5 y 3.6 deducimos que $a_{m,n} = z_{m,n}^*$ si $m \neq n$ en $\mathbb{N}$. En efecto, si $x^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ y $m, k \in \mathbb{N}$ por 3.5 vemos que

$$\delta_m(T)(x^*)_k = (a_{m,m} - a_{k,k})\, x_{m,k}^* + \sum_{n\in\mathbb{N}-\{m\}} a_{m,n}x_{n,k}^* - \sum_{n\in\mathbb{N}-\{k\}} a_{n,k}x_{m,n}^*,$$

i.e. $\delta(T)(x^*)$ permanece sin cambios modificando la diagonal $\{a_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ salvo una constante. Así, podemos reemplazar $a_{n,n} \leftrightarrow a_{n,n} - a_{1,1} + z_{1,1}^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sigue que $z_{m,m}^* - z_{k,k}^* = a_{m,m} - a_{k,k}$ para $m, k \in \mathbb{N}$. Así, $a_{n,n} = z_{n,n}^* - z_{1,1}^* + a_{1,1} = z_{n,n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la condición es necesaria. La suficiencia es inmediata.

■

**Corolario 3.3.2.** *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\delta_X(T) \in \mathcal{N}^1(\mathcal{U})$. Entonces $\delta_X(T)$ es implementable como derivación interna por un elemento $u \in \mathcal{U}$ tal que $u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes y_n^*$ de modo que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_{k,n} y_{k,m}^* \right| < +\infty.$$

***Demostración.*** Sea $\delta_X(T) = ad_u$, $u \in \mathcal{U}$. Escribiremos $u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes y_n^*$, donde no solo $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|_1 \|y_k^*\|_\infty < \infty$ sinó que $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n^*\|_\infty < +\infty$ y $\|y_n\|_1 \to 0$ (cf. [48], p. 257). Si $x^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ y $m, n \in \mathbb{N}$ escribimos $z_{m,n}^* \triangleq \langle y_n, x_m^* \rangle$ y $w_{m,n}^* \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} y_{k,m} y_{k,n}^*$. Si $m \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\|z_m^*\|_\infty \leq \|x_m^*\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_1, \tag{3.7}$$

$$\|w_m^*\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|w_{m,n}^*\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k,m}| \, \|y_k^*\|_\infty \tag{3.8}$$

Por (3.7) $z^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ y

$$\|z^*\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))} \leq \|x^*\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_1.$$

Por (3.8) $w^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ y

$$\|w^*\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|_1 \|y_k^*\|_\infty.$$

Además,

$$\begin{aligned} \sum_{m,n,p\in\mathbb{N}} \left|y_{n,p} y_{n,m}^*\right| \|x_m^*\|_\infty &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m^*\|_\infty \sum_{p=1}^{\infty} \left|y_{n,p} y_{n,m}^*\right| \\ &\leq \|x^*\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))} \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_1 \|y_n^*\|_\infty < +\infty, \end{aligned} \tag{3.9}$$

y

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} |\langle y_n, x_m^* \rangle| \, \|y_n^*\|_\infty \leq \|x^*\|_{l^1(l^\infty(\mathbb{N}))} \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_1 \|y_n^*\|_\infty < +\infty. \tag{3.10}$$

Por 3.8 y 3.10 vemos que

$$ad_u(s_{x^*}) = \sum_{p=1}^{\infty} e_p \otimes (w^* \cdot x^* - z^* \cdot y^*)_p \tag{3.11}$$

Por (3.11), (3.4) y el Teorema 3.3.1 (ii) y como $y^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ tenemos

$$\begin{aligned}
\delta(T)(x^*) &= w^* \cdot x^* - z^* \cdot y^* \\
&= \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} w^*_{p,m} x^*_m - z^*_{p,m} y^*_m \right\}_{p=1}^{\infty} \\
&= \left\{ \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} x^*_{m,k} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n,p} y^*_{n,m} - \left\langle y_m, x^*_p \right\rangle y^*_{m,k} \right\}_{k=1}^{\infty} \right\}_{p=1}^{\infty} \\
&= \left\{ \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} x^*_{m,k} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n,p} y^*_{n,m} - y^*_{m,k} \sum_{n=1}^{\infty} y_{m,n} x^*_{p,n} \right\}_{k=1}^{\infty} \right\}_{p=1}^{\infty} \\
&= \left\{ \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} x^*_{m,k} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n,p} y^*_{n,m} - x^*_{p,m} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n,m} y^*_{n,k} \right\}_{k=1}^{\infty} \right\}_{p=1}^{\infty} \\
&= \left\{ \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} x^*_{m,k} w^*_{p,m} - x^*_{p,m} w^*_{m,k} \right\}_{k=1}^{\infty} \right\}_{p=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Como $w^* \in l^1(l^\infty(\mathbb{N}))$ la afirmación se sigue por Teorema 3.3.1. ■

# Capítulo 4

# $(\sigma, \tau)$-Derivaciones

## 4.1. Introducción

Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ álgebras asociativas sobre un cuerpo $\mathcal{K}$, sea $X$ un $\mathcal{U}_2$-bimódulo y consideremos sendas aplicaciones lineales $\sigma, \tau : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ y $d : \mathcal{U}_1 \to X$. Se dice que $d$ es una *$(\sigma, \tau)$-derivación de $\mathcal{U}_1$ con valores en $X$* si $d\,(ab) = \sigma\,(a)\,d\,(b) + d\,(a)\,\tau\,(b)$ cualesquiera sean $a, b \in \mathcal{U}_1$. Indicaremos $\mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}\,(X)$ la clase de éstas $(\sigma, \tau)$-derivaciones. En caso que $\sigma = \tau$ diremos que $d$ es una *$\sigma$-derivación* y escribiremos $\mathcal{D}_{(\sigma,\sigma)}\,(X) = \mathcal{D}_{\sigma}\,(X)$. Así $\mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}\,(X)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{L}\,(\mathcal{U}_1, X)$ y evidentemente estamos ante una generalización natural de la noción de derivación corriente. Por ejemplo, $d \in \mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}\,(X)$ si para $\sigma, \tau \in Hom\,(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, $x \in X$ y $a \in \mathcal{U}_1$ definimos $d(a) = x\tau\,(a) - \sigma\,(a)\,x$. Decimos en este caso que $d$ es la *$(\sigma, \tau)$-derivación interna implementada por $x$*.

Ya desde un punto de vista algebraico la investigación de $(\sigma, \tau)$-derivaciones está justificada pues la naturaleza de las mismas refleja propiedades acerca de las estructuras subyacentes. Construcciones más generales en las que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son simplemente anillos son posibles, objeto de una intensa investigación y de una profusa literatura. Por ejemplo, si $\mathcal{U}$ es anillo de división, $[\mathcal{U} : \mathcal{Z}(\mathcal{U})] > 4$ y si $\mathcal{V} \subsetneq \mathcal{U}$ es un subanillo invariante por todas las $(\sigma, \tau)$-derivaciones internas implementadas por elementos de $\mathcal{U}$ entonces $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{U})$ [12]. Más aún, sean $\mathcal{U}$ un anillo unitario simple y $\mathcal{V}$ un subanillo primitivo de $\mathcal{U}$ que contiene a la unidad.[1] Dados $\sigma, \tau$ monomorfismos de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$, si $\mathcal{V}$ resulta invariante bajo la acción de toda $(\sigma, \tau)$-derivación entonces $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Z}\,(\mathcal{U}) \cap \ker\,(\sigma - \tau)$ o $[\mathcal{U} : \mathcal{Z}\,(\mathcal{U})] = 4$ y $\mathcal{V} = \mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$, donde

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \{a \in \mathcal{U} : ab = ba \text{ para cada } b \in \mathcal{V}\}$$

es el *centralizador* o *conmutador* de $\mathcal{V}$ respecto de $\mathcal{U}$.

[1]Luego $\mathcal{U}$ no contiene ideales biláteros no triviales y $\mathcal{V}$ admite alguna *representación fiel* en algún *$\mathcal{V}$-módulo simple a izquierda*.

Por $(\sigma,\tau)$-derivaciones y resultados de continuidad automática en álgebras de Banach, $C^*$-algebras o von Neumann álgebras v. [39], [40] y [42] respectivamente. Respecto a $(\sigma,\tau)$-amenabilidad de $C^*$-álgebras v. [41].[2] Respecto a relaciones de $(\sigma,\tau)$ derivaciones y la identidad v. [45].

## 4.2. Dos problemas de Mirzavaziri

La dependencia teórica de una $(\sigma,\tau)$-derivación $d$ respecto de las aplicaciones lineales $\sigma$ y $\tau$ es objeto de intensa investigación. Por ejemplo, el siguiente teorema establece algunas condiciones que garantizan continuidad automática, a saber:

**Teorema 4.2.1.** *(cf. [40], Th. 2.1) Sea $d \in \mathcal{D}_\sigma(X)$, donde $\sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es un homomorfismo de álgebras. Entonces:*

**(i)** $X$ munido de las acciones $a \cdot x = \sigma(a)\, x$ y $x \cdot a = x\sigma(a)$, con $a \in \mathcal{U}$ y $x \in X$, es un $\mathcal{U}$-bimódulo, al que indicamos $\widetilde{X}$.

**(ii)** $d : \mathcal{U} \to \widetilde{X}$ es una derivación en el sentido usual.

**(iii)** $\mathcal{U} \oplus \widetilde{X}$ es un álgebra sobre $\mathcal{U}$ con la estructura vectorial usual, si para $(a,x)$ y $(b,y)$ en $\mathcal{U} \oplus \widetilde{X}$ escribimos $(a,x)\cdot(b,y) \triangleq (ab, a\cdot y + x \cdot b)$.

**(iv)** La aplicación $\varphi_d : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \oplus \widetilde{X}$, $\varphi_d(a) = (a, d(a))$ es monomorfismo.

**(v)** Sean además $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $X$ espacios normados y $\sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Escibiremos

$$\|(a,x)\| \triangleq \|a\| + \sup_{\|b\|\le 1, \|c\|\le 1} \{\|x\|, \|bx\|, \|xc\|\}, \quad (a,x) \in \mathcal{U} \times X.$$

Entonces $\mathcal{U} \oplus \widetilde{X}$ deviene espacio normado y $\varphi_d$ es continua si y solo si $d$ es continua.

**(vi)** Si todo monomorfismo de $\mathcal{U}$ en un álgebra de Banach es continuo entonces toda $\sigma$-derivación de $\mathcal{U}$ con valores en un $\mathcal{V}$-bimódulo de Banach $X$ es continua.

Es nuestro propósito en este capítulo el análisis de los siguientes problemas (cf. [38], p. 2):

**(A)** Dada una $(\sigma,\tau)$-derivación decidir si $\sigma$ y $\tau$ habrán de ser necesariamente morfismos.

**(B)** La composición de morfismos con derivaciones produce $\sigma$-derivaciones. Decidir si toda $\sigma$-derivación tiene dicha estructura general.

Daremos respuesta a ambos problemas en el contexto de álgebras de matrices finitas. Aún en este marco simple el análisis reviste alguna dificultad y estimamos que tiene interés propio [35].

[2] Un álgebra de Banach $\mathcal{U}$ se dice $(\sigma,\tau)$-amenable cuando toda $(\sigma,\tau)$-derivación resulta interna.

### 4.2.1. $\mathbb{M}_n(\mathcal{K})$ en cuanto $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$ módulo a izquierda

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathcal{K})) \times \mathbb{M}_n(\mathcal{K}) &\to \mathbb{M}_n(\mathcal{K}), \\ (a, x) \to a \bullet x &= \sum_{k,h=1}^{n} x_{k,h} a^{k,h}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si $\{e^{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ es la base canónica de $\mathbb{M}_n(\mathcal{K})$, $x \in \mathbb{M}_n(\mathcal{K})$ y $\sigma \in L(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$ vemos que

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{i,j}(x) e^{i,j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,h=1}^{n} x_{k,h} \sigma_{i,j}\left(e^{k,h}\right) e^{i,j} \\ &= \sum_{k,h=1}^{n} x_{k,h} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{i,j}\left(e^{k,h}\right) e^{i,j} \\ &= \left[\sigma\left(e^{i,j}\right)\right]_{1 \leq i,j \leq n} \bullet x. \end{aligned} \tag{4.2}$$

La aplicación $F(\sigma) = [\sigma(e^{i,j})]_{1 \leq i,j \leq n}$ define un isomorfismo lineal entre $L(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$ y $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$. De esta manera, si $\sigma, \mu \in L(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$ resulta

$$F(\sigma \circ \mu) = \left[F(\sigma) \bullet \mu^{i,j}\right]_{1 \leq i,j \leq n}.$$

En efecto, por (4.1) y (4.2) si $1 \leq i, j \leq n$ se tiene

$$\begin{aligned} F(\sigma \circ \mu)_{i,j} &= (\sigma \circ \mu)\left(e^{i,j}\right) \\ &= \sigma\left(\mu\left(e^{i,j}\right)\right) \\ &= \sigma\Big(\sum_{k,h=1}^{n} \mu_{k,h}^{i,j} e^{k,h}\Big) \\ &= \sum_{k,h=1}^{n} \mu_{k,h}^{i,j} \sigma(e^{k,h}) \\ &= \sum_{k,h=1}^{n} F(\sigma)^{k,h} \mu_{k,h}^{i,j} \\ &= F(\sigma) \bullet \mu^{i,j}. \end{aligned}$$

Así, si $a, b \in \mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$ hacemos $a * b = F(F^{-1}(a) \circ F^{-1}(b))$. Provisto de esta multiplicación $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$ es un álgebra asociativa sobre $\mathcal{K}$, $F$ es un homomorfismo algebraico y $\mathbb{M}_n(\mathcal{K})$ es un $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$-módulo a izquierda.

### 4.2.2. Caracterización de $\sigma$-derivaciones

El objeto de esta sección es caracterizar la clase $\mathcal{D}_\sigma(\mathcal{U})$ de $\sigma$-derivaciones sobre algebras de matrices finitas $\mathcal{U} = \mathbb{M}_n(\mathcal{K})$ sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ de característica cero.

**Teorema 4.2.2.** *(cf. [35]) La clase de derivaciones $\mathcal{D}_\sigma(\mathcal{U})$ consiste del conjunto de soluciones del sistema lineal de ecuaciones matriciales del siguiente tipo:*

$$\delta_{j,k} d^{i,h} = d^{i,j}\sigma^{k,h} + \sigma^{i,j} d^{k,h},\ 1 \leq i, j, k, h \leq n, \tag{4.3}$$

*donde $\delta_{j,k}$ denota el símbolo de Kronecker usual.*

***Demostración.*** Sea $d \in \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{U}), x, y \in \mathbb{M}_n(\mathcal{K}), 1 \leq i, j \leq n$. Entonces

$$\begin{aligned} d_{i,j}(xy) &= [d(x)\sigma(y) + \sigma(x)\, d(y)]_{i,j} \\ &= \sum_{l=1}^{n} [d_{i,l}(x)\sigma_{l,j}(y) + \sigma_{i,l}(x)\, d_{l,j}(y)] \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left[ \sum_{1 \leq r,s,t,u \leq n} d_{i,l}^{r,s}\sigma_{l,j}^{t,u} x_{r,s} y_{t,u} + \sigma_{i,l}^{r,s} d_{l,j}^{t,u} x_{r,s} y_{t,u} \right] \end{aligned}$$

Para $1 \leq m, p \leq n$ sea $e^{m,p} = \left\{\delta_{i,j}^{m,p}\right\}_{1 \leq i,j \leq n}$ las matrices canónicas de $\mathbb{M}_n(\mathcal{K})$. Por la relación previa, si $1 \leq p, q, m, w, i, j \leq n$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\delta_{p,q} d^{m,w}\right)_{i,j} &= \delta_{p,q} d_{i,j}^{m,w} \\ &= \delta_{p,q} d_{i,j}\left(e^{m,w}\right) \\ &= d_{i,j}\left(e^{m,p} e^{q,w}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(d_{i,l}^{m,p}\sigma_{l,j}^{q,w} + \sigma_{i,l}^{m,p} d_{l,j}^{q,w}\right) \\ &= \left(d^{m,p}\sigma^{q,w} + \sigma^{m,p} d^{q,w}\right)_{i,j} \end{aligned}$$

y sigue 4.3.Recíprocamente, dada una solución $\left\{d^{k,h}\right\}_{1 \leq k,h \leq n}$ de (4.3) y $x \in \mathbb{M}_n(\mathcal{K})$ escribimos

$$d(x) = \left\{ \sum_{1 \leq k,h \leq n} d_{i,j}^{k,h} x_{k,h} \right\}_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Claramente $d \in L(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$ y para $x, y \in \mathbb{M}_n(\mathcal{K})$ y $1 \leq i, j \leq n$ es

$$\begin{aligned}
[d(x)\sigma(y) + \sigma(x)d(y)]_{i,j} &= \sum_{l=1}^{n} [d_{i,l}(x)\sigma_{l,j}(y) + \sigma_{i,l}(x)d_{l.j}(y)] \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left[ \sum_{u,v=1}^{n} d_{i,l}^{u,v} x_{u,v} \sum_{s,t=1}^{n} \sigma_{l,j}^{s,t} y_{s,t} \right. \\
&\left. + \sum_{u,v=1}^{n} \sigma_{i,l}^{u,v} x_{u,v} \sum_{s,t=1}^{n} d_{l,j}^{s,t} y_{s,t} \right] \\
&= \sum_{u,v,s,t=1}^{n} x_{u,v} y_{s,t} \sum_{l=1}^{n} \left[ d_{i,l}^{u,v} \sigma_{l,j}^{s,t} + \sigma_{i,l}^{u,v} d_{l,j}^{s,t} \right] \\
&= \sum_{u,v,s,t=1}^{n} \left[ d^{u,v}\sigma^{s,t} + \sigma^{u,v} d^{s,t} \right]_{i,j} x_{u,v} y_{s,t} \\
&= \sum_{u,v,s,t=1}^{n} \delta_{v,s} d_{i,j}^{u,t} x_{u,v} y_{s,t} \\
&= \sum_{u,t=1}^{n} d_{i,j}^{u,t} (xy)_{u,t} \\
&= d_{i,j}(xy),
\end{aligned}$$

es decir, $d$ es una $\sigma$-derivación. ■

### 4.2.3. $\sigma$-derivaciones sobre $\mathbb{M}_2(\mathcal{K})$

Por 4.2.2 debemos buscar las soluciones del sistema matricial lineal 4.3. En lo que sigue, daremos una descripción alternativa de 4.3 sobre $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(\mathcal{K}))$ . Este sistema es bastante dificil de manejar y el punto de vista natural de 4.2.1 ya no es aplicable. Por ello, cabe señalar que trataremos el sistema 4.3 del Teorema 4.2.3 mediante el producto formal usual de matrices por bloques. En el contexto de la prueba será claro lo que sucede. Sea $x \in \mathbb{M}_2(\mathcal{K})$. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in L(\mathbb{M}_2(\mathcal{K}))$ los operadores:

$$\begin{aligned}
a_1(x) = x_{1,2}e^{1,1} + x_{2,2}e^{2,1}, \ a_2(x) = x_{1,1}e_{2,1} + x_{1,2}e_{2,2}, \\
a_3(x) = x_{1,2}e^{1,2} + x_{2,2}e^{2,2}, \ a_4(x) = x_{2,1}e^{2,1} + x_{2,2}e^{2,2}.
\end{aligned}$$

Si $a, b \in \mathbb{M}_2(\mathcal{K})$ introduciremos $\Delta_{a,b}, m \in L(\mathbb{M}_2(\mathcal{K}))$ como $\Delta_{a,b}(x) = ax + xb$ y

$$m(x) = \begin{bmatrix} x_{2,2} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{1,1} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 4.2.3.** *(cf. [35]) El sistema de ecuaciones 4.3 es equivalente al siguiente sistema sobre* $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(\mathcal{K}))$ :

$$\begin{array}{llcl} (a) & \sigma d + d\sigma & = & 2d, \\ (b) & m(\sigma)\, d + m(d)\, \sigma & = & 0, \\ (c) & \Delta_{a_1(\sigma),a_2(\sigma)} & = & 0, \\ (d) & \Delta_{a_3(\sigma),a_4(\sigma)} & = & d. \end{array} \tag{4.4}$$

***Demostración.*** Por 4.3 con $j = k = 1, 2$ tenemos

$$d^{1,1} = d^{1,1}\sigma^{1,1} + \sigma^{1,1}d^{1,1}, \tag{4.5}$$

$$d^{1,2} = d^{1,1}\sigma^{1,2} + \sigma^{1,1}d^{1,2}, \tag{4.6}$$

$$d^{1,1} = d^{1,2}\sigma^{2,1} + \sigma^{1,2}d^{2,1}, \tag{4.7}$$

$$d^{1,2} = d^{1,2}\sigma^{2,2} + \sigma^{1,2}d^{2,2}, \tag{4.8}$$

$$d^{2,1} = d^{2,1}\sigma^{1,1} + \sigma^{2,1}d^{1,1}, \tag{4.9}$$

$$d^{2,2} = d^{2,1}\sigma^{1,2} + \sigma^{2,1}d^{1,2}, \tag{4.10}$$

$$d^{2,1} = d^{2,2}\sigma^{2,1} + \sigma^{2,2}d^{2,1}, \tag{4.11}$$

$$d^{2,2} = d^{2,2}\sigma^{2,2} + \sigma^{2,2}d^{2,2}, \tag{4.12}$$

y si $j \neq k$ en $\{1,2\}$ tenemos que

$$0 = d^{1,1}\sigma^{2,1} + \sigma^{1,1}d^{2,1}, \tag{4.13}$$

$$0 = d^{1,1}\sigma^{2,2} + \sigma^{1,1}d^{2,2}, \tag{4.14}$$

$$0 = d^{1,2}\sigma^{1,1} + \sigma^{1,2}d^{1,1}, \tag{4.15}$$

$$0 = d^{1,2}\sigma^{1,2} + \sigma^{1,2}d^{1,2}, \tag{4.16}$$

$$0 = d^{2,1}\sigma^{2,1} + \sigma^{2,1}d^{2,1}, \tag{4.17}$$

$$0 = d^{2,1}\sigma^{2,2} + \sigma^{2,1}d^{2,2}, \tag{4.18}$$

$$0 = d^{2,2}\sigma^{1,1} + \sigma^{2,2}d^{1,1}, \tag{4.19}$$

$$0 = d^{2,2}\sigma^{1,2} + \sigma^{2,2}d^{1,2}. \tag{4.20}$$

Así, por (4.5) y (4.7), (4.6) y (4.8), (4.9) y (4.11), (4.10) y (4.12) tenemos

$$\sigma^{1,1}d^{1,1} + \sigma^{1,2}d^{2,1} = 2d^{1,1} - \left(d^{1,1}\sigma^{1,1} + d^{1,2}\sigma^{2,1}\right),$$

$$\sigma^{1,1}d^{1,2} + \sigma^{1,2}d^{2,2} = 2d^{1,2} - \left(d^{1,1}\sigma^{1,2} + d^{1,2}\sigma^{2,2}\right),$$

$$\sigma^{2,1}d^{1,1} + \sigma^{2,2}d^{2,1} = 2d^{2,1} - \left(d^{2,1}\sigma^{1,1} + d^{2,2}\sigma^{2,1}\right),$$

$$\sigma^{2,1}d^{1,2} + \sigma^{2,2}d^{2,2} = 2d^{2,2} - \left(d^{2,1}\sigma^{1,2} + d^{2,2}\sigma^{2,2}\right),$$

es decir, $\sigma d + d\sigma = 2d$. Además por (4.13) y (4.15), (4.14) y (4.16), (4.17) y (4.19), (4.18) y (4.20):

$$\sigma^{1,2}d^{1,1} + \sigma^{1,1}d^{2,1} = -d^{1,2}\sigma^{1,1} - d^{1,1}\sigma^{2,1}, \tag{4.21}$$

$$\sigma^{1,2}d^{1,2} + \sigma^{1,1}d^{2,2} = -d^{1,2}\sigma^{1,2} - d^{1,1}\sigma^{2,2}, \tag{4.22}$$

$$\sigma^{2,2}d^{1,1} + \sigma^{2,1}d^{2,1} = -d^{2,2}\sigma^{1,1} - d^{2,1}\sigma^{2,1,} \tag{4.23}$$

$$\sigma^{2,2}d^{1,2} + \sigma^{2,1}d^{2,2} = -d^{2,2}\sigma^{1,2} - d^{2,1}\sigma^{2,2}. \tag{4.24}$$

Esto es $m(\sigma)\,d + m(d)\,\sigma = 0$. Ahora, $\Delta_{a_1(\sigma),a_2(\sigma)}(d) = 0$ por (4.15), (4.16), (4.19) y (4.20) mientras que $\Delta_{a_3(\sigma),a_4(\sigma)}(d) = d$ por (4.7), (4.8), (4.11) y (4.12). Por otro lado, una solución $d = [d^{i,j}]$ de (4.3) satisface (4.15), (4.16), (4.19), (4.20) y (4.7), (4.8), (4.11), (4.12) porque $(c)$ y $(d)$ se verifican. Como consecuencia de $(a)$ obtenemos (4.5), (4.6), (4.9) y (4.10). Finalmente, por $(b)$ se verifican las identidades (4.21) a (4.24), que junto con (4.15), (4.16), (4.19) y (4.20) implica (4.13), (4.14), (4.17) y (4.18). ■

**Observación 4.2.4.** La falta de simetria en el sistema (4.4) del Teorema 4.2.3 es aparente. De hecho, $(b)$ es equivalente a la ecuación $\sigma m(d) + dm(\sigma) = 0$. Asimismo, $(c)$ y $(d)$ pueden ser reemplazados por las ecuaciones $\Delta_{a^1(\sigma),a^2(\sigma)}(d) = 0$ y $\Delta_{a^3(\sigma),a^4(\sigma)}(d) = 0$, donde

$$a^1(x) = x_{1,1}e^{1,2} + x_{2,1}e^{2,2},\ a^2(x) = x_{2,1}e^{1,1} + x_{2,2}e^{1,2},$$
$$a^3(x) = x_{1,1}e^{1,1} + x_{1,2}e^{1,2},\ a^4(x) = x_{1,1}e^{1,1} + x_{2,1}e^{2,1}.$$

### 4.2.4. Descripción completa de $\mathcal{D}_\sigma(\mathcal{U})$

**Teorema 4.2.5.** *(cf. [35]) Sea $\sigma \in L(\mathbb{M}_n(\mathcal{K}))$, $\sigma(x) = \sum_{i=1}^n x_{i,i}e^{i,i}$ si $x \in \mathbb{M}_n(\mathcal{K})$. Existen $\sigma$-derivaciones no triviales sólo si $n = 2$, donde para una $\sigma$-derivación $d$ existen únicas constantes $k_1, k_2 \in K$ tal que $d(x) = k_1x_{1,2}e^{1,2} + k_2x_{2,1}e^{2,1}$ para todo $x \in \mathbb{M}_2(\mathcal{K})$.*

***Demostración.*** Claramente $\sigma^{i,j} = \delta_{i,j}e^{i,j}$ si $1 \leq i,j \leq n$. Ahora observemos que $\mathcal{D}_\sigma(\mathcal{U}) = \{0\}$ si $n \neq 2$. Si $n = 1$ una $\mathrm{Id}_\mathcal{K}$-derivación deviene derivación y en este contexto, cualquier derivación es nula. Si $n \geq 3$ y $d \in \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{U})$ por (4.3) $d^{i,h} = d^{i,j}\sigma^{j,h} + \sigma^{i,j}d^{j,h}$ para todo $1 \leq i,j,h \leq n$. Pero dados los indices $i,h$ podemos elegir $j \in \{1,...,n\} - \{i,h\}$ para concluir que $d^{i,h} = 0$. Por lo tanto, centramos nuestra atención en el caso $n = 2$. Consideremos (4.3) con $j = 1$ y $k = 2$. Se dan los siguientes cuatro casos:

**(i)** Si $i = h = 1$, $\sigma^{1,1}d^{2,1} = 0$. Por lo tanto, $d_{1,1}^{2,1} = d_{1,2}^{2,1} = 0$.

**(ii)** Si $i = 1$ y $h = 2$,

$$0 = d^{1,1}\sigma^{2,2} + \sigma^{1,1}d^{2,2} = d_{1,1}^{2,2}e^{1,1} + \left(d_{1,2}^{1,1} + d_{1,2}^{2,2}\right)e^{1,2} + d_{2,2}^{1,1}e^{2,2}.$$

Entonces $d_{1,1}^{2,2} = d_{2,2}^{1,1} = 0$ y $d_{1,2}^{1,1} + d_{1,2}^{2,2} = 0$.

**(iii)** La ecuación correspondiente a $i = 2$ y $h = 1$ es trivial dado que $\sigma^{2,1} = 0$.

**(iv)** Si $i = h = 2$,

$$0 = d^{2,1}\sigma^{2,2} + \sigma^{2,1}d^{2,2} = d^{2,1}_{1,2}e^{1,2} + d^{2,1}_{2,2}e^{2,2}.$$

Así $d^{21}_{12} = d^{21}_{22} = 0$.

Ahora con $j = 2$ y $k = 1$ en (4.3) tenemos los siguientes cuatro casos:

**(v)** Si $i = h = 1$,

$$0 = d^{1,2}\sigma^{1,1} + \sigma^{1,2}d^{1,1} = d^{1,2}_{1,1}e^{1,1} + d^{1,2}_{2,1}e_{2,1}.$$

Así $d^{1,2}_{1,1} = d^{1,2}_{2,1} = 0$.

**(vi)** La ecuación correspondiente a $i = 1$ y $h = 2$ es trivial dado que $\sigma^{1,2} = 0$.

**(vii)** Si $i = 2$ y $h = 1$,

$$0 = d^{2,2}\sigma^{1,1} + \sigma^{2,2}d^{1,1} = d^{2,2}_{1,1}e^{1,1} + \left(d^{2,2}_{2,1} + d^{1,1}_{2,1}\right)e^{2,1} + d^{1,1}_{2,2}e^{2,2}.$$

Entonces $d^{2,2}_{1,1} = d^{1,1}_{2,2} = 0$ y $d^{2,2}_{2,1} + d^{1,1}_{2,1} = 0$.

**(viii)** Si $i = h = 2$,

$$0 = d^{2,2}\sigma^{1,2} + \sigma^{2,2}d^{1,2} = d^{1,2}_{2,1}e^{2,1} + d^{1,2}_{2,2}e^{2,2}.$$

Entonces $d^{1,2}_{2,1} = d^{1,2}_{2,2} = 0$.

Con $j = k = 1$ en (4.3) tenemos los siguientes cuatro casos:

**(ix)** Si $i = h = 1$,

$$d^{1,1} = d^{1,1}\sigma^{1,1} + \sigma^{1,1}d^{1,1} = 2d^{1,1}_{1,1}e^{1,1} + d^{1,1}_{1,2}e^{1,2} + d^{1,1}_{2,1}e_{2,1}.$$

Entonces $d^{1,1}_{1,1} = d^{1,1}_{2,2} = 0$.

**(x)** Si $i = 1$ y $h = 2$,

$$d^{1,2} = d^{1,1}\sigma^{1,2} + \sigma^{1,1}d^{1,2} = d^{1,2}_{1,1}e^{1,1} + d^{1,2}_{1,2}e^{1,2}.$$

Entonces $d^{1,2}_{2,1} = d^{1,2}_{2,2} = 0$.

**(xi)** Si $i = 2$ y $h = 1$,

$$d^{2,1} = d^{2,1}\sigma^{1,1} + \sigma^{2,1}d^{1,1} = d^{2,1}_{1,1}e^{1,1} + d^{2,1}_{2,1}e^{2,1}.$$

Entonces $d^{2,1}_{1,2} = d^{2,1}_{2,2} = 0$.

**(xii)** Si $i = h = 2$, $d^{2,2} = d^{2,1}\sigma^{1,2} + \sigma^{2,1}d^{1,2} = 0$.

Si $j = k = 2$ en (4.3) tenemos los siguientes cuatro casos:

**(xiii)** Si $i = h = 1$, $d^{1,1} = d^{1,2}\sigma^{2,1} + \sigma^{1,2}d^{2,1} = 0$.

**(xiv)** Si $i = 1$ y $h = 2$,

$$d^{1,2} = d^{1,2}\sigma^{2,2} + \sigma^{1,2}d^{2,2} = d^{1,2}_{1,2}e^{1,2} + d^{1,2}_{2,2}e^{2,2}.$$

Entonces $d^{12}_{1,1} = d^{1,2}_{2,1} = 0$.

**(xv)** Si $i = 2$ y $h = 1$,

$$d^{2,1} = d^{2,2}\sigma^{2,1} + \sigma^{2,2}d^{2,1} = d^{2,1}_{2,1}e^{2,1} + d^{2,1}_{2,2}e^{2,2}.$$

Entonces $d^{2,1}_{1,1} = d^{2,1}_{1,2} = 0$.

**(xvi)** Si $i = h = 2$,

$$d^{2,2} = d^{2,2}\sigma^{2,2} + \sigma^{2,2}d^{2,2} = d^{2,2}_{1,2}e^{1,2} + d^{2,2}_{2,1}e^{2,1} + 2\, d^{2,2}_{2,2}e^{2,2}.$$

Entonces $d^{2,2}_{1,1} = d^{2,2}_{2,2} = 0$.

Finalmente, la afirmación se sigue por las conclusiones de (i)-(xvi). ■

### 4.2.5. Avances sobre problemas de estructura de $\sigma-$derivaciones

Continuaremos con la notación del Teorema 4.2.5. Claramente $\sigma$ no es un homomorfismo sobre $\mathbb{M}_2(\mathcal{K})$ pero $\mathcal{D}_\sigma(\mathcal{U})$ no es trivial. Así la respuesta al Problema (A) de §4.2 es negativa, i.e. en general las $\sigma$-derivaciones no son implementadas por homomorfismos. Respecto al problema (B), consideramos la $\sigma$-derivación $d(x) = x_{1,2}e^{1,2} + x_{2,1}e^{2,1}$ definida para $x \in \mathbb{M}_2(\mathcal{K})$. Supongamos que existe una derivación $\delta$ sobre $\mathbb{M}_2(\mathcal{K})$ tal que $d = \delta \circ \sigma$. Se sabe que entonces $\delta$ debe ser una derivación interna, incluso en un contexto más general (cf. [6]). Así, si $a \in \mathbb{M}_2(\mathcal{K})$ es tal que $\delta = \delta_a$ tendriamos que

$$\begin{aligned} x_{1,2}e^{1,2} + x_{2,1}e^{2,1} &= d(x) \\ &= a\sigma(x) - \sigma(x)a \\ &= \left(a_{1,2}e^{1,2} - a_{2,1}e^{2,1}\right)(x_{2,2} - x_{1,1}) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{M}_2(\mathcal{K})$, lo cual es imposible. Por lo tanto, la respuesta al Problema (B) de §4.2 también es negativa.

# Bibliografía


[1] Anderson, J. H.: *Derivation ranges and the identity.* Bull. of the AMS, Vol. 79, 705-708, (1973).

[2] Bade, W. G., Curtis, P. C. Jr. & Dales, H. G.: *Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras.* Pro. London Math. Soc. (3), **55**, 359-377, (1987). MR 88f:46098.

[3] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires.* Z Subwencji Funduszu Kultury Narodowej. Warszawa, (1932).

[4] Barrenechea, A. L. & Peña, C. C., *On the structure of derivations on certain non-amenable nuclear Banach algebras*, New York Journal of Mathematics, 15, 199-209, (2007).

[5] Brown, A. & Pearcy, C.: *Structure of commutators of operators.* Ann. of Math., (2), **82**, 112-127, (1965). MR31#2612.

[6] Chernoff, P. R.: *Representations, automorphisms and derivations on some operator algebras*. J. Functional Analysis, 12, 275-289, (1973). MR50#2934.

[7] Dales, H. G., *Banach algebras and automatic continuity*. Oxford Sc. Publ., Clarendon Press, Oxford, (2000). ISBN: 0-19-850013-0.

[8] Dales, H. G., Gharahmani, F. & Grømbæk, N.: *Derivations into iterated duals of Banach algebras.* Studia Mathematica 128(1), 19-54, (1998). Zlb. 0903.46045.

[9] Diestel, j. & J. J. Uhl, Jr.: *Vector measures.* Math. Surveys and Monographs. No. 15. AMS, Providence, Rhode Island, (1977). ISBN: 0-8218-1516-6.

[10] Elliott, G. A.: *Some $C^*$-algebras with outer derivations.* Rocky Mountain J. of Mathematics, Vol. 3, no. 3, 501-506, (1973).

[11] Enflo, P.: *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*. Acta Math. 130, 309-317 (1973).

[12] Felix, Y.: *S-T derivations dans les corps,* Bull. Soc. Math. Belgique, Ser. B, 31 (1979), 121-134.

[13] Grønbæk, N.: *Amenability and weak amenability of tensor algebras and algebras of nuclear operators.* Austral. Math. Soc., Ser. A, 51, 483-488, (1991).

[14] Haagerup, U.: *All nuclear $C^*$-algebras are amenable.* Invet Math., **74**, 305-319, (1983). MR 85g:46074.

[15] Haaderup, U. & Laustsen, N. J.: *Weak amenability of $C^*$- algebras and a theorem of Goldstein.* Banach algebras ´97. El Albrecht & M. Mathieu Ed.s. Walter de Grutyer. Berlin, N. Y.. 221-243, (1998). MR 99k:46096.

[16] Halmos, P. R.: *Commutators of operators.* Amer. J. Math., **74**, 237-240, (1952).

[17] Halmos, P. R.: *Commutators of operators II.* Amer. J. Math., **76**, 191-198, (1954).

[18] Hartwig, J., Larsson, D. & Silvestrov, S. D. : *Deformations of Lie algebras using $\sigma-$derivations*, arXiv math/0408064 [math.QA].

[19] Helemskiĭ, A. Ya.: *Flat Banach modules and amenable algebras.* Trans. Moscow Math. Soc., **47**, 199-224, (1985).

[20] Helemskiĭ, A. Ya & Sheĭmberg, M. V.: *Amenable Banach algebras. Trans.* Functional Analysis Appl., **13**, 32-37, (1979). MR 81g:46061.

[21] Johnson, B. E.: *Norms of derivations on $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 38, no. 2, 465-469, (1971).

[22] Johnson, B. E.: *Cohomology in Banach algebras.* Mem. Amer. Math. Soc. **127**, (1972). MR 51#11130.

[23] Johnson, B. E.: *Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras.* Amer. J. Math., **94,** 685-698, (1972). MR47#5598.

[24] Johnson, B. E.: *Weak amenability of groups algebras.* Bull. London Math. Soc., **23**, 281-284, (1991).

[25] Kaplansky, I.: *Modules over operator algebras*. Amer. J. Math., **75,** 839-858, (1953). MR15-327.

[26] Kaplansky, I.: *Functional analysis, Some aspects of analysis and probability,* Survey in Applied Mathematics, Vol 4 pp. 1-34, John Wiley & Sons, Inc, New York; Chapman & Hall, London (1958).

[27] Kishimoto, K. & Tominaga, H.: *On inner $\rho$-derivations*. Hokkaido Math. J., 1, 110-113, (1972).

[28] Knopp, K. & Lorentz, G. G.: *Beiträge zur absoluten Limitierun*g. Archiv. der Math., 2, (1949), 10-16. Zbl 0041.18402.

[29] Komatsu, H.: *On inner $(\sigma, \tau)$-derivations of simple rings*. Math. J. Okayama Univ., 23, 33-36, (1981).

[30] Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L., *Classical Banach spaces I*, Springer-Verlag, Berlin (1977)

[31] Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L., *Classical Banach spaces II*, Springer-Verlag, Berlin (1979)

[32] Maddox, I. J.: *Infinite matrices of operators.* Lect. Notes in Maths., 786, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1980. ISBN: 3-540-09764-3.

[33] Madrid, A. P.: *Elementos de Cohomología en álgebras de Banach. Amenabilidad.* Tesis de Grado de Licenciatura en Matemáticas, UNCPBA, (2006).

[34] Madrid, A. P. & Peña, C. C., *On X-Hadamard and B-derivations.* General Mathematics. Vol. 16, no. 1, (2008), 41-50. Zbl 1234.47029. http://www.emis.de/journals/GM/vol16nr3/cuprins163.html

[35] Madrid, A. P.: *On $\sigma$-derivations on finite matrix algebras.* Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis. Vol. 29, (1), (2013).

[36] Madrid, A. P.: *On bounded operators on a Banach space and bounded derivations on projective tensor algebras.* New Zealand J. of Maths., Vol. 43, 23-29, (2013).

[37] Mahmoodi, A.: *Some properties of Beurling algebras.* Methods of functional analysis and topology. Vol. 15, no. 3, 259-263, (2009).

[38] Mirzavaziri, M.: *Types of derivations*. Archive os SIDE. The $18^{th}$ Seminar on Mathematical Analysis and its Applications. Tarbiat Moallem university, 14-18, (2009).

[39] Mirzavaziri, M. & Moslehian, M. S.: *$\sigma-$derivations in Banach algebra*s. Bull. of the Iranian Math. Soc., Vol 32, N$^o$ 1, 65-78, (2006).

[40] Mirzavaziri, M. & Moslehian, M. S.: *Automatic continuity of $\sigma$-derivations in C*-algebras*. Proc. Amer. Math. Soc., 11, no. 5, 805-813, (2006).

[41] Mirzavaziri, M. & Moslehian, M. S.: *$(\sigma, \tau)$-amenability of $C^*$-algebras*. Georgian Math. J., Vol. 18, Issue 1, 137-145, (2011).

[42] Mirzavaziri, M. & Moslehian, M. S.: *Ultraweak continuity of $\sigma$-derivations on von Neumann algebras*. Math. Physics, Analysis and Geometry, 12, 109-115, (2009).

[43] Newman, D. J.: *A radical algebra without derivations.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 10, no. 4, 584-586, (1959).

[44] Palmer, T. W., *Banach algebras and the general theory of *-algebras, Vol I,* Cambridge University Press, Cambridge, (1994).

[45] Peña, C. C.: *When the identity is a $(\sigma, \tau)$-derivation.* Actas del XI Congreso Dr. A. Monteiro, 159-163, (2011).

[46] A. Pietsch: *Operator ideals.* Mathematical Monographs., **16**, North-Holland Publ. Co.. Amsterdam, New York, Oxford, (1980). MR 81a:47002.

[47] Pisier, G.: *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces.* Regional Conference Series in Maths., 60, AMS. Providence, Rhode Islands, (1986).

[48] Runde, V., *Lectures on amenability*, Springer_Verlag, Berlin, Heidelberg, New york (2002)

[49] Sakai, S.: *On a conjecture of Kaplansky.* Tŏhoku Math. J., (2)12, 31-33, (1960). MR22#2913.

[50] Sakai, S.: *Derivations of simple C*-algebras, III.* Tŏhoku Math. J., **23**, 559-564, (1971).

[51] Sakai, S.: *Recent developments in the theory of unbounded derivations in C*-algebras*. Proc. International Congress of Mathematicians. Helsinki, Vol. 2, 709-713, (1978). Zbl 0458.46046

[52] Sakai, S.: *Operator algebras in dynamical systems. The theory of unbounded derivations on C*-algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, (1991). MR92h:46099.

[53] Schauder, J.: *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen.* Math. Zeitschr., **26**, 47-65, (1927).

[54] Singer, I., Bases in Banach spaces I. Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, New York, (1970).

[55] Singer, I. M. & Wermer, J.: *Derivations on commutative normed algebras.* Math. Ann., **129**, 260-264, (1955). MR16, 1125c.

[56] Stampfli, J. G.: *The norm of a derivation.* Pacific Journal of Mathematics. Vol. 33, 737-747, (1970).

[57] A. Szankowski: $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *does not have the approximation property.* Acta Math., **147**, 89-108, (1981).

[58] Thomas, M. P.: *The image of a derivation is contained in the radical.* Ann. of Math., **128**, 435-460, (1988). MR90d:46075.

[59] Van Praag, P.: *S-derivations internes dans les corps,* J. Algebra **17** (1971), 470-473.

[60] Yamazaki, S.: *Rings and basis in Banach spaces.* Sci. Papers Coll. Gen.. Ed. Univ. Tokio, **15**, 1-13, 1–13. MR0178344 (31 #2602), Zbl 0138.37702(1965).

[61] Weiss, G.: *B(H)-commutators: a historical survey.* Operator Theory. Advances and Applications. Vol. 153, 307-320, (2004).

[62] Wielandt, H.: *Über die Unbeschränktheit der Operatoren der Quantenmechanik.* Math. Ann., **121**, 21, (1949).

[63] Williams, J. P.: *On the range of a derivation.* Pacific J. Math., **38**, 273-279, (1971).

[64] Wintner, A.: *The unboundedness of quantum-mechanical matrices.* Phys. Rev., **71**, 738-739, (1947).

# Parte I

# Anexo.

# Elementos de Cohomologia en Álgebras de Banach. Amenabilidad.

# Introducción

El objetivo de esta tesis es dar una introducción a la teoría de amenabilidad. La tarea no es sencilla, pues supone la adecuación de la teoría algebraico-homológica de Hochschild al marco de las álgebras de Banach. La primera requiere las técnicas y la terminología propias del álgebra tensorial, adaptable al contexto que nos importa ya que estas estructuras pueden ser metrizadas en cuanto espacios de Banach.

Se impone la siguiente pregunta: tratándose este de un trabajo introductorio a la teoría de amenabilidad en álgebras de Banach, -¿Qué aspectos de la misma se han de considerar fundacionales, digamos pilares básicos e insoslayables?- Aún a riesgo de no dar con una respuesta satisfactoria, esta cuestión nos facilita la tarea, al menos en principio. La teoría de amenabilidad ha sido concebida para comprender la estructura de los denominados **grupos paradojales.** Estos grupos, también denominados **degenerados** o **no amenos,** permíten construcciones teóricas que lógicamente rechaza el sentido común. La cuestión, establecida hacia 1924 por S. Banach y A. Tarski, fue resuelta satisfactoriamente por B. Johnson en 1972. Se ha podido establecer entonces que a todo grupo localmente compacto hay asociada salvo isomorfismos una única álgebra de Banach, de modo que la eventual paradojalidad del grupo equivale a la existencia de una precisa estructura de la correspondiente álgebra. Tiene sentido entonces hablar de grupos y de álgebras amenables, constituyendo los teoremas de caracterización de Johnson de ambas categorías la respuesta más acabada a la cuestión que nos habíamos planteado.

El plan de trabajo ahora es simple; en el Capítulo I describimos la construcción de espacios tensoriales, a los que se metriza en cuanto espacios de Banach. Este tópico lo definimos como preliminar pues da el contexto para todo el trabajo restante. Otras construcciones, como las medidas de Haar, espacios de medidas complejas, grupos de homología y cohomología, etc., se describen en la medida que se las necesita. La amenabilidad propiamente dicha es abordada en el Capítulo I. En la Sección I introducimos los elementos necesa-rios de la teoría de Hochschild y resultados de adecuación de esta en el marco de álgebras de Banach. La caracterización de álgebras amenables se establece en la Sección I, y la de grupos amenables en la Sección I. El Capítulo I está dedicado al desarrollo de algunos ejemplos, en una lista necesariamente incompleta.

La lectura de este trabajo supone el conocimiento de elementos de la Teoría de Módulos, de Teoría de la Medida, de Análisis Funcional y Topología General. No obstante, hemos procurado que el material de estudio sea lo más autocontenido posible salvo quizás en alguna aplicación muy puntual del teorema de factorización de Cohen, sobre el que no hemos abundado para no distraernos y alejarnos de nuestro propósito principal.

A. P. M. - C. C. P.. Tandil, 2006.

# Preliminares

## Módulos sobre álgebras de Banach

En general nos hemos de interesar en la acción de álgebras de Banach sobre bimódulos de Banach. Salvo que se indique lo contrario, todas las construcciones se harán sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de números complejos. Precisamente, si $\mathfrak{U}$ es un álgebra de Banach asociativa y $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach indicaremos $a, b, c, ...$ a los elementos de $\mathfrak{U}$, $x, y, z, ...$ a los elementos de $\mathbb{E}$. Diremos entonces que $\mathbb{E}$ es un $\mathfrak{U}-$módulo de Banach a izquierda (resp. a derecha) si $\mathbb{E}$ es un $\mathfrak{U}-$módulo a izquierda (resp. a derecha) en el sentido algebraico usual, o sea en cuanto se considere a $\mathfrak{U}$ en cuanto anillo. En consecuencia, hay una acción $\mathfrak{U} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ del tipo $(a, x) \to a \cdot x$ (resp. $(a, x) \to x \cdot a$) la cual está regida por las condiciones de todo módulo sobre un anillo sujeta a las condiciones adicionales:

**(i)** $\|a \cdot x\| \leq \|a\| \|x\|$ (resp. $\|x \cdot a\| \leq \|x\| \|a\|$),

**(ii)** $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ (resp. $(x \cdot a) \cdot b = x \cdot (b \cdot a) = x \cdot (a \cdot_{\mathfrak{U}^{op}} b)$),

**(iii)** $\lambda \cdot (a \cdot x) = (\lambda \cdot a) \cdot x = a \cdot (\lambda \cdot x)$ (resp. $(x \cdot a) \cdot \lambda = x \cdot (\lambda \cdot a) = (\lambda \cdot x) \cdot a$) si $\lambda \in \mathbb{C}$.

Por (i) se establece la continuidad de la acción de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{E}$. En particular, por abuso de notación estamos usando la misma nomenclatura para indicar las normas de $\mathfrak{U}$ y de $\mathbb{E}$. La condición (ii) indica que, en definitiva, hay básicamente dos acciones naturales de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{E}$: la del anillo $\mathfrak{U}$ o la del anillo opuesto $\mathfrak{U}^{op}$. Mediante (iii) señalamos que $\mathbb{E}$ es una $\mathbb{C}-$álgebra sobre el anillo $\mathfrak{U}$. Si $\mathfrak{U}$ fuere unitaria y si $e$ indicare el correspondiente elemento unidad asumiremos que $\|e\| = 1$ y que $e \cdot x = x$ (resp. $x \cdot e = x$) si $x \in \mathbb{E}$. Diremos que $\mathbb{E}$ es un $\mathfrak{U}-$bimódulo de Banach si es un $\mathfrak{U}-$módulo de Banach tanto a izquierda como a derecha. Eventualmente, si $\mathfrak{B}$ fuere otra álgebra de Banach diremos que $\mathbb{E}$ es un $(\mathfrak{U},\mathfrak{B})-$bimódulo en caso de ser $\mathfrak{U}-$módulo de Banach a izquierda y $\mathfrak{B}-$módulo de Banach a derecha.

**Ejemplo 4.2.1.** Sea $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}-$bimódulo. Consideramos el espacio de Banach $\mathcal{B}(\mathfrak{U}, \mathbb{E})$ de las aplicaciones lineales acotadas de $\mathfrak{U}$ en $\mathbb{E}$. Las relaciones

$$(a \cdot T)(b) = a \cdot T(b) \text{ y } (T \cdot a)(b) = T(b \cdot a) - T(a) \cdot b$$

definen sobre $\mathcal{B}(\mathfrak{U},\mathbb{E})$ una estructura de $\mathfrak{U}-$bimódulo. *En efecto, fijados* $T\in\mathcal{B}(\mathfrak{U},\mathbb{E})$ y $a\in\mathfrak{U}$ entonces $a\cdot T:\mathfrak{U}\to\mathbb{E}$ es lineal pues el producto de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{E}$ distribuye respecto a la suma y $\mathbb{E}$ es una $\mathbb{C}-$álgebra sobre el anillo $\mathfrak{U}$. Además

$$\|(a\cdot T)(b)\|=\|a\cdot T(b)\|\leq\|a\|\,\|T(b)\|\leq\|a\|\,\|T\|\,\|b\|\,,$$

si $b\in\mathfrak{U}$, o sea $a\cdot T\in\mathcal{B}(\mathfrak{U},\mathbb{E})$ . En particular, $\|a\cdot T\|\leq\|a\|\,\|T\|$ y como

$$((a\cdot b)\cdot T)(c)=(a\cdot b)\cdot T(c)=a\cdot(b\cdot T(c))=a\cdot((b\cdot T)(c))=(a\cdot(b\cdot T))(c)$$

para cada $a,b,c\in\mathfrak{U}$ resulta $(a\cdot b)\cdot T=a\cdot(b\cdot T)$ . *Análogamente,* la acción de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathcal{B}(\mathfrak{U},\mathbb{E})$ a derecha también está bien definida y

$$\begin{aligned}((T\cdot a)\cdot b)(c)&=(T\cdot a)(c\cdot b)-(T\cdot a)(b)\cdot c\\&=T((c\cdot b)\cdot a)-T(a)\cdot(c\cdot b)-\{T(b\cdot a)\cdot c-(T(a)\cdot b)\cdot c\}\\&=T(c\cdot(b\cdot a))-T(b\cdot a)\cdot c=(T\cdot(b\cdot a))(c)\end{aligned}$$

si $a,b,c\in\mathfrak{U}$, i.e. $(T\cdot a)\cdot b=T\cdot(b\cdot a)$ .

**Ejemplo 4.2.2.** En particular, si $\mathbb{E}$ es un $\mathfrak{U}-$módulo de Banach a izquierda (resp. a derecha) y $\mathbb{E}^*$ es la clase de formas lineales acotadas sobre $\mathbb{E}$ entonces $\mathbb{E}^*$ admite una estructura de $\mathfrak{U}^{op}-$módulo de Banach a derecha (resp. a izquierda). Para ello basta definir para cada $a\in\mathfrak{U}$, $x\in\mathbb{E}$ y $x^*\in\mathbb{E}^*$ las acciones dadas por $\langle x,x^*\cdot a\rangle=\langle a\cdot x,x^*\rangle$ (resp. $\langle x,a\cdot x^*\rangle=\langle x\cdot a,x^*\rangle$)

# Productos tensoriales

Como veremos en el Capítulo I la caracterización de las llamadas álgebras amenables se ha de dar en el marco de ciertos productos tensoriales. Estas estructuras fueron estudiadas en principio por R. Schatten y A. Grothendieck (cf. [29], [11]). En general, si $\mathbb{E}_1,...,\mathbb{E}_n,\mathbb{F}$ fueren espacios vectoriales indicaremos $\mathcal{L}_a^n(\mathbb{E}_1,...,\mathbb{E}_n,\mathbb{F})$ al espacio vectorial de funciones $n-$multilineales de $\mathbb{E}_1\times...\times\mathbb{E}_n$ en $\mathbb{F}$.

**Definición 4.2.6.** Sean $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ espacios vectoriales complejos. Se denomina **producto tensorial** de $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ a todo par $(\mathbb{V},t)$ formado por un $\mathbb{C}-$espacio vectorial $\mathbb{V}$, una función bilineal $t:\mathbb{E}\times\mathbb{F}\to\mathbb{V}$ cuya imagen genera a $\mathbb{V}$ y se verifica además la siguiente propiedad: Para todo $\mathbb{C}-$espacio vectorial $\mathbb{F}$ y toda $B\in\mathcal{L}_a^2(\mathbb{E},\mathbb{F},G)$ existe una única aplicación lineal $\widetilde{B}:\mathbb{V}\to G$ tal que $B=\widetilde{B}\circ t$.

Notemos que si hubiere un producto tensorial de $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ el mismo debe ser único salvo isomorfismos de $\mathbb{C}-$espacios vectoriales. En efecto, sean $(\mathbb{V}_1,t_1)$ y $(\mathbb{V}_2,t_2)$ productos tensoriales de $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$. Hay entonces aplicaciones lineales únicas $\widetilde{t_1}:\mathbb{V}_1\to\mathbb{V}_2$ y $\widetilde{t_2}:\mathbb{V}_2\to$

$\mathbb{V}_1$ tales que $t_1 = \widetilde{t}_2 \circ t_2$ y $t_2 = \widetilde{t}_1 \circ t_1$. Se deduce entonces que $\widetilde{t}_1 \circ \widetilde{t}_2$ y $\mathrm{Id}_{\mathbb{V}_2}$ coinciden sobre la imagen de $t_2$, que genera a $\mathbb{V}_2$ sobre $\mathbb{C}$. Luego $\widetilde{t}_1 \circ \widetilde{t}_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}_2}$ y, análogamente, $\widetilde{t}_2 \circ \widetilde{t}_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}_1}$, i.e. $\mathbb{V}_1 \approx \mathbb{V}_2$. A raíz de esto indicaremos $(\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \otimes)$ *al* producto tensorial de $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$, y escribiremos $\otimes(x, y) = x \otimes y$ para cada $(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$.

**Teorema 4.2.7.** *Existe* $(\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}, \otimes)$ .

*Demostración.* Si $\mathbb{M} = \bigoplus_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}} \mathbb{C}$ cada elemento de $\mathbb{M}$ puede interpretarse como una función de $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ con soporte finito. Sea $\varkappa : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \to \mathbb{M}$ tal que $\varkappa : (x, y) \to \varkappa_{x,y}$, definida por $\varkappa_{x,y}(x', y') = \delta_{x,y}^{x',y'}$ si $x, x' \in \mathbb{E}$ e $y, y' \in \mathbb{F}$, donde $\delta$ es el símbolo de Kronecker. En particular, $\mathbb{M}$ tiene una estructura natural de $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sea $\mathbb{M}_0$ el subespacio de $\mathbb{M}$ generado por elementos de la forma $\varkappa_{x_1+x_2,y} - \varkappa_{x_1,y} - \varkappa_{x_2,y}$, $\varkappa_{x,y_1+y_2} - \varkappa_{x,y_1} - \varkappa_{x,y_2}$, $\varkappa_{\lambda x,y} - \lambda\varkappa_{x,y}$ o $\varkappa_{x,\lambda y} - \lambda\varkappa_{x,y}$, donde $x, x_1, x_2 \in \mathbb{E}$, $y, y_1, y_2 \in \mathbb{F}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Sean $\mathbb{V} = \mathbb{M}/\mathbb{M}_0$, $p : \mathbb{M} \to \mathbb{V}$ la proyección al cociente y sea $t = p \circ \varkappa$. Dados un $\mathbb{C}-$espacio vectorial $\mathbb{G}$ y $B \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{G}}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, sea $\sigma \in \mathbb{M}$, digamos $\sigma = \sum \sigma(x, y)\varkappa_{x,y}$. Escribiremos $B_0(\sigma) = \sum \sigma(x, y)B(x, y)$. Notemos que $B_0 : \mathbb{M} \to \mathbb{G}$ está bien definido porque $\{\varkappa_{x,y}\}_{(x,y)\in\mathbb{E}\times\mathbb{F}}$ es base de $\mathbb{M}$. Además $B_0$ es lineal y $\mathbb{M}_0 \subseteq \ker B_0$. Si $u \in \mathbb{V}$ y $u = p(\sigma)$ escribiremos $\widetilde{B}(u) = B_0(\sigma)$. Si fuere además $u = p(\sigma')$ entonces $\sigma - \sigma' \in \mathbb{M}_0$ y $B_0(\sigma) = B_0(\sigma')$, i.e. queda bien definida una aplicación lineal $\widetilde{B} : \mathbb{V} \to \mathbb{G}$ tal que $\left(\widetilde{B} \circ t\right)(x, y) = \widetilde{B}(p(\varkappa_{x,y})) = B(x, y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$. Notemos que $t$ es ciertamente bilineal y que $t(\mathbb{E} \times \mathbb{F})$ genera a $\mathbb{V}$. Concluímos entonces que $\mathbb{V} \approx \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ y sigue la tesis. $\square$

**Proposición 4.2.8.** *Sean* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{E}}$, $\widetilde{\mathbb{F}}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ *espacios vectoriales complejos, entonces son válidas las siguientes propiedades;*

(i) $(\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}) \otimes \mathbb{G} \approx \mathbb{E} \otimes (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})$ .

(ii) Si $S : \mathbb{E} \to \widetilde{\mathbb{E}}$, $T : \mathbb{F} \to \widetilde{\mathbb{F}}$ son lineales existe una única aplicación lineal

$$S \otimes T : \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \to \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{F}}$$

tal que $(S \otimes T)(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$.

(iii) Si además $U : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ es lineal hay isomorfismos de espacios vectoriales

$$\widetilde{B} : (\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}) \otimes \mathbb{G} \to \mathbb{E} \otimes (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}) \ \text{ y } \ \widetilde{C} : \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \left(\widetilde{\mathbb{F}} \otimes \widetilde{\mathbb{G}}\right) \to \left(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{F}}\right) \otimes \widetilde{\mathbb{G}}$$

tales que $(S \otimes T) \otimes U = \widetilde{C} \circ [S \otimes (T \otimes U)] \circ \widetilde{B}$.

*Demostración.* **(i)** Fijamos $z \in \mathbb{G}$ y definimos $B_z(x,y) = x \otimes (y \otimes z)$, $(x,y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$. Como $B_z$ es bilineal existe $\widetilde{B}_z : \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \to \mathbb{E} \otimes (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})$ lineal, única, tal que

$$\widetilde{B}_z\,(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$$

para cada $x \in \mathbb{E}$ e $y \in \mathbb{F}$. Sea $B : \mathbb{E} \otimes \mathbb{F} \times \mathbb{G} \to \mathbb{E} \otimes (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})$, $B(u,z) = \widetilde{B}_z\,(u)$. Entonces $B$ está bien definida y es bilineal, con lo que existe una única aplicación lineal $\widetilde{B} : (\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}) \otimes \mathbb{G} \to \mathbb{E} \otimes (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})$ tal que $\widetilde{B}(u \otimes z) = \widetilde{B}_z\,(u)$ para cada $u$ y cada $z$. Análogamente, fijado $x \in \mathbb{E}$ sea $C^x(y,z) = (x \otimes y) \otimes z$, $(y,z) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}$. Como $C^x$ es bilineal sea $\widetilde{C^x} : \mathbb{F} \otimes \mathbb{G} \to (\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}) \otimes \mathbb{G}$ lineal, única, tal que $\widetilde{C^x}\,(y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ si $(y,z) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}$. Sea ahora

$$C : \mathbb{E} \times (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}) \to (\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}) \otimes \mathbb{G},\; C(x,v) = \widetilde{C^x}\,(v)\,.$$

Como $C$ es bilineal existe $\widetilde{C}$ lineal, única, tal que $\widetilde{C}\,(x \otimes v) = \widetilde{C^x}\,(v)$ para cada $x$ y cada $v$. Finalmente, bastará ver que $\widetilde{B}$ y $\widetilde{C}$ son aplicaciones recíprocas. A tal efecto, sea $x \otimes v \in \mathbb{E} \otimes (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})$, y sea $v = \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes z_j$ en $\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{B} \circ \widetilde{C}\right)(x \otimes v) &= \widetilde{B}\left(\widetilde{C^x}\,(v)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{B}\left(\widetilde{C^x}\,(y_j \otimes z_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{B}\,((x \otimes y_j) \otimes z_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{B}_{z_j}\,(x \otimes y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x \otimes (y_j \otimes z_j) = x \otimes v.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que $\widetilde{B} \circ \widetilde{C} = \mathrm{Id}_{\mathbb{E} \otimes (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})}$. Análogamente $\widetilde{C} \circ \widetilde{B} = \mathrm{Id}_{(\mathbb{E} \otimes \mathbb{F}) \otimes \mathbb{G}}$.

**(ii)** Basta considerar la aplicación bilineal $B\,(x,y) = S\,(x) \otimes T\,(y)$, con $(x,y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$, y usar la propiedad universal que caracteriza al producto tensorial.

**(iii)** Es inmediato usando la demostración de (i).

□

**Observación 4.2.9.** Por la Prop. 4.2.8 nos hemos de referir, en adelante, a productos tensoriales $\mathbb{E}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{E}_n$ y a aplicaciones lineales

$$T_1 \otimes \ldots \otimes T_n : \mathbb{E}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbb{F}_n$$

cuya existencia sigue a partir de aplicaciones lineales dadas $T_j : \mathbb{E}_j \to \mathbb{F}_j$, $1 \leq j \leq n$. No hará falta especificar el orden en que estas construcciones se hagan, y se ha de tener presente el sentido de unicidad de los mismos según vimos anteriormente.

## Espacios tensoriales normados

Es necesario ahora dotar estas estructuras de una estructura métrica que los realice como espacios de Banach. No hay una única forma de hacer esto, pero hay al menos dos puntos de vista naturales. Sean $\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_n$ espacios de Banach y sea $u \in \mathbb{E}_1 \otimes ... \otimes \mathbb{E}_n$. Indiquemos entonces

$$\alpha(u) = \sup \left\{ \left| \otimes_{j=1}^n x_j^*(u) \right| : \|x_1^*\|_{\mathbb{E}_1^*} = ... = \|x_n^*\|_{\mathbb{E}_n^*} = 1 \right\}, \tag{4.25}$$

$$\omega(u) = \text{ínf} \left\{ \sum_j \prod_{i=1}^n \|x_j^i\| \text{ si } u = \sum_j x_j^1 \otimes ...... \otimes x_j^n \right\}.$$

**Proposición 4.2.10.** *La relación (4.25) define normas sobre* $\mathbb{E}_1 \otimes ... \otimes \mathbb{E}_n$. *En particular, se trata de normas cruzadas, i.e.*

$$\alpha(x_1 \otimes ...... \otimes x_n) = \omega(x_1 \otimes ...... \otimes x_n) = \|x_1\| ...... \|x_n\| \textit{ si } x_i \in E_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

*Si $\beta$ fuere cualquier otra norma cruzada entonces $\alpha \leq \beta \leq \omega$.*

*Demostración.* Si $u = x_1 \otimes ...... \otimes x_n$ entonces

$$\left| \otimes_{j=1}^n x_j^*(u) \right| = \prod_{j=1}^n \left| x_j^*(x_j) \right| \leq \|x_1\| ...... \|x_n\|$$

toda vez que $\|x_1^*\|_{\mathbb{E}_1^*} = ... = \|x_n^*\|_{\mathbb{E}_n^*} = 1$. Luego $\alpha(u) \leq \|x_1\| ...... \|x_n\|$. En particular $\alpha(0) = 0$. Supongamos $u \neq 0$, sea dado $0 < \epsilon < 1$ y sean $x_j^* \in \mathbb{E}_j^*$ funcionales de norma uno tales que $\left|x_j^*(x_j)\right| \geq (1-\epsilon)\|x_j\|$ si $1 \leq j \leq n$. Así

$$(1-\epsilon)^n \prod_{j=1}^n \|x_j\| \leq \prod_{j=1}^n \left| x_j^*(x_j) \right| \leq \alpha(u).$$

Como $\epsilon$ puede ser arbitrariamente pequeño entonces $\alpha(u) = \|x_1\| ...... \|x_n\|$. Evidentemente $\alpha \geq 0$, $\alpha$ es subaditiva y $\alpha(cu) = |c|\,\alpha(u)$ si $c \in \mathbb{C}$ y $u \in \mathbb{E}_1 \otimes ... \otimes \mathbb{E}_n$. Supongamos $\alpha(u) = 0$ y veamos que $u = 0$. En efecto, podemos representar $u$ como $u = \sum_{k=1}^m x_1^k \otimes ... \otimes x_n^k$ y asumir $n > 1$. Haremos inducccción en $m$, de modo que ya sabemos cierta la afirmación si $m = 1$ y podemos suponerla válida si el número de sumandos es menor que cierto $m > 1$. También podemos suponer $x_j^k \neq 0$ si $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq k \leq m$. Sean $x_j^* \in \mathbb{E}_j^*$ unitarias tales que

$$x_j^*(x_j^1) = \left\| x_j^1 \right\|, 1 \leq j \leq n-1,$$

(cf. [8], Corollary 1.27, p. 12). Por hipótesis tenemos

$$0 = \otimes_{j=1}^n x_j^*(u) = \sum_{k=1}^m \prod_{j=1}^n x_j^*(x_j^k) = x_n^* \left[ \sum_{k=1}^m x_n^k \prod_{j=1}^{n-1} x_j^*(x_j^k) \right]$$

cualquiera sea el funcional unitario $x_n^*$ de $\mathbb{E}_n^*$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{m} x_n^k \prod_{j=1}^{n-1} x_j^*(x_j^k) = 0,$$

i.e. $\left\{x_n^k\right\}_{1\leq k\leq m}$ es l.d.. Podemos suponer que $x_n^m = \sum_{k=1}^{m-1} c_k x_n^k$ para ciertos $c_1, ..., c_{m-1} \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{m} x_1^k \otimes ... \otimes x_n^k \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} x_1^k \otimes ... \otimes x_n^k + x_1^m \otimes ... \otimes x_{n-1}^m \otimes \sum_{k=1}^{m-1} c_k x_n^k \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left[x_1^k \otimes ... \otimes x_{n-1}^k + c_k \left(x_1^m \otimes ... \otimes x_{n-1}^m\right)\right] \otimes x_n^k. \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva deducimos que $u = 0$ y $\alpha$ es una norma. Por otro lado, dados $x_j \in \mathbb{E}_j, 1 \leq j \leq n$, resulta $\omega(x_1 \otimes ...... \otimes x_n) \leq \|x_1\| ...... \|x_n\|$. Podemos suponer cada $x_j \neq 0$ y si $0 < \epsilon_j < \|x_j\|$ sea $x_j^* \in \mathbb{E}_j^*$ tal que $\left\|x_j^*\right\| \leq 1$ y $\left|x_j^*\left(x_j\right)\right| > \epsilon_j$. Si fuere $x_1 \otimes ...... \otimes x_n = \sum_{v=1}^{m} y_v^1 \otimes ...... \otimes y_v^n$ obtenemos

$$\prod_{j=1}^{n} \epsilon_j < \left|\left(\bigotimes_{j=1}^{n} x_j^*\right)(x_1 \otimes ...... \otimes x_n)\right| \leq \sum_{i=1}^{m} \left|\prod_{j=1}^{n} x_j^*\left(y_i^j\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \left\|x_j^*\right\| \left\|y_i^j\right\|.$$

Luego $\prod_{j=1}^{n} \epsilon_j \leq \omega(x_1 \otimes ...... \otimes x_n)$ y haciendo $\epsilon_j \to \|x_j\|^-$ si $1 \leq j \leq n$ sigue que

$$\prod_{i=1}^{n} \|x_i\| \leq \omega\left(x_1 \otimes ...... \otimes x_n\right).$$

Es inmediato que $\omega$ es una norma, salvo quizás que ha de ser $u = 0$ si $\omega(u) = 0$. Pero si $\beta$ es cualquier norma cruzada sobre $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathbb{E}_j$ y si $u = \sum_{j=1}^{s} x_j^1 \otimes ... \otimes x_j^n$ entonces $\beta(u) \leq \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{n} \left\|x_i^j\right\|$. Luego $\beta(u) \leq \omega(u)$. En particular, $\alpha(u) \leq \omega(u)$ y $\alpha(u) > 0$ si $u \neq 0$. $\square$

**Definición 4.2.11.** Dado $z \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{E}_i$, escribiremos $\|z\|_\omega = \omega(z)$ y diremos que $\|z\|_\omega$ es la **norma proyectiva** de $z$. La completación de $(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{E}_i, \|z\|_\omega)$ se indicará con $\widehat{\bigotimes_{1\leq i\leq n}} \mathbb{E}_i$.

Diremos entonces que el espacio de Banach $\widehat{\bigotimes_{1\le i\le n}}\mathbb{E}_i$ es el **producto tensorial proyectivo** de $\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_n$.

**Observación 4.2.12.** Si $\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_n, \mathbb{F}$ son espacios de Banach sea $\mathcal{B}^n(\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_n, \mathbb{F})$ el $\mathbb{C}-$espa-cio vectorial de aplicaciones $n-$multilineales continuas $\phi : \mathbb{E}_1 \times ... \times \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}$. Se sabe que una aplicación $n-$multilineal $\phi$ pertenece a $\mathcal{B}^n(\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_n, \mathbb{F})$ si y solo si el número extendido

$$\|\phi\| = \sup\left\{\|\phi(x_1, ..., x_n)\| : \|x_1\|_{\mathbb{E}_1} = ... = \|x_n\|_{\mathbb{E}_n} = 1\right\}$$

es finito. Por otra parte, $(\mathcal{B}^n(\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_n, \mathbb{F}), \|\circ\|)$ es un espacio de Banach.

**Proposición 4.2.13.** *Sean $\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_n, \mathbb{F}$ espacios de Banach y sea $\phi \in \mathcal{B}^n(\mathbb{E}_1, ..., \mathbb{E}_n, \mathbb{F})$. Existe un único operador $T_\phi \in \mathcal{B}(\widehat{\bigotimes_{1\le i\le n}}\mathbb{E}_i, \mathbb{F})$ tal que*

$$T_\phi(x_1 \otimes ... \otimes x_n) = \phi(x_1, ..., x_n)$$

*cuando $x_j \in \mathbb{E}_j$, $1 \le j \le n$ y $\|T_\phi\| = \|\phi\|$.*

*Demostración.* Sea $\widetilde{\phi} : \bigotimes_{1\le i\le n}\mathbb{E}_i \to \mathbb{F}$ lineal tal que $\widetilde{\phi}(x_1 \otimes ... \otimes x_n) = \phi(x_1, ..., x_n)$ si $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{E}_1 \times ... \times \mathbb{E}_n$. En consecuencia, si $u = \sum_{j=1}^{s} x_j^1 \otimes ... \otimes x_j^n$ en $\bigotimes_{1\le i\le n}\mathbb{E}_i$ resulta

$$\left\|\widetilde{\phi}(u)\right\| \le \sum_{j=1}^{s} \left\|\phi\left(x_j^1, ..., x_j^n\right)\right\| \le \|\phi\| \sum_{j=1}^{s}\prod_{j=1}^{n} \left\|x_i^j\right\|,$$

de donde $\left\|\widetilde{\phi}(u)\right\| \le \|\phi\|\,\omega(u)$. Como $\widehat{\bigotimes_{1\le i\le n}}\mathbb{E}_i$ es espacio de Banach y $\widetilde{\phi}$ resulta lineal y acotada sobre el subespacio denso $\bigotimes_{1\le i\le n}\mathbb{E}_i$ entonces $\widetilde{\phi}$ se extiende a un operador acotado $T_\phi$: $\widehat{\bigotimes_{1\le i\le n}}\mathbb{E}_i \to \mathbb{F}$ tal que $\|T_\phi\| \le \|\phi\|$. Es claro que $T_\phi = 0$ si $\phi = 0$. Sino, dado $0 < \epsilon < \|\phi\|$ existe $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{E}_1 \times ... \times \mathbb{E}_n$ tal que $\|x_1\|_{\mathbb{E}_1} = ... = \|x_n\|_{\mathbb{E}_n} = 1$ y

$$\|\phi\| - \epsilon < \|\phi(x_1, ..., x_n)\| = \left\|\widetilde{\phi}(x_1 \otimes ... \otimes x_n)\right\| = \|T_\phi(x_1 \otimes ... \otimes x_n)\| \le \|T_\phi\|,$$

pues $\omega(x_1 \otimes ... \otimes x_n) \le 1$. Como $\epsilon$ es arbitrariamente pequeño sigue que $\|T_\phi\| = \|\phi\|$. La unicidad de $T_\phi$ es inmediata. $\square$

**Corolario 4.2.14.** *Sean $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ álgebras de Banach, $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}-$módulo de Banach a izquierda y $\mathbb{F}$ un $\mathfrak{B}-$módulo de Banach a derecha. Entonces $\mathbb{E}\widehat{\otimes}\mathbb{F}$ es un $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})-$bimódulo.*

*Demostración.* Fijados $a \in \mathfrak{U}$, $b \in \mathfrak{B}$ las aplicaciones $f_a, g_b : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \to \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}$ dadas mediante

$$f_a(x, y) = (ax) \otimes y, \; g_b(x, y) = x \otimes (yb)$$

son ambas bilineales y acotadas. Por la Prop. 4.2.13 hay únicos operadores $F_a, G_b \in \mathcal{B}(\mathbb{E}\widehat{\otimes}\mathbb{F})$ tales que $F_a(x \otimes y) = (a \cdot x) \otimes y$ y $G_b(x \otimes y) = x \otimes (y \cdot b)$ . Escribiendo

$$a \cdot (x \otimes y) = F_a(x \otimes y) \text{ y } (x \otimes y) \cdot b = G_b(x \otimes y)$$

es fácil ver que las relaciones

$$a \cdot (x \otimes y) = (a \cdot x) \otimes y, \; (x \otimes y) \cdot b = x \otimes (yb)$$

definen una estructura de $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$ $-$bimódulo sobre $\mathbb{E}\widehat{\otimes}\mathbb{F}$. $\square$

# Amenabilidad

El propósito de este capítulo es caracterizar las denominadas *álgebras amenables.* Ha sido una importante innovación la consideración de los grupos de homología y cohomología como un aspecto de la estructura general de álgebras de Banach (cf. [18], [19]). Entre los primeros estudios en esta dirección cabe mencionar las investigaciones de B. Johnson y J. L. Taylor (cf. [21], [36]). La escuela de Moscú, dirigida por A. Ya. Helemskii, consideró este tópico desde un punto de vista diferente, pero muy enriquecedor para el estudio de ciertas propiedades de amenabilidad hereditarias (v. [15]). Diremos que un álgebra de Banach $\mathfrak{U}$ se dice **amenable** si $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) = \{0\}$ para cualquier $\mathfrak{U}-$bimódulo de Banach $\mathbb{E}$, donde

$$\mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) = \frac{\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)}{\mathcal{N}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)}$$

es el primer grupo de cohomología de Hochschild. Estamos indicando:

$$\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) = \{\delta \in \mathcal{B}\,(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) : \delta(a.b) = a.\delta(b) + \delta(a).b \text{ si } a, b \in \mathfrak{U}\}$$

i.e. $\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$ consiste de las llamadas **derivaciones** de $\mathfrak{U}$ en $\mathbb{E}^*$. Además

$$\mathcal{N}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) = \{\delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) : \delta = \mathrm{ad}_{x^*} \text{ para cierto } x^* \in \mathbb{E}^*\}\,,$$

donde $\mathrm{ad}_{x^*}(a) = a \cdot x^* - x^* \cdot a$ para cada $a \in \mathfrak{U}$. Notar que $\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$ es un subespacio de Banach de $\mathcal{B}\,(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$ y que $\mathcal{N}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$ es un subespacio eventualmente no cerrado de $\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$. A los elementos de $\mathcal{N}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$ les denominaremos **derivaciones internas**. Entonces, en el caso de álgebras amenables la estructura de toda derivación con valores en el dual de un espacio de Banach es la más simple, i.e. la de una derivación interna. De esta manera, conceptos como el de amenabilidad dan información sobre la estructura de derivaciones sobre álgebras de Banach. Desde luego nos estamos interesando en una clase particular de operadores y, ciertamente, en general ha de haber derivaciones no internas. Pareciera ser restrictivo un concepto como el de amenabilidad y, justamente, se podrían hacer teorías análogas distinguiendo clases diferentes de la de espacios de Banach duales. En esta dirección hay tres tipos especiales, entre otros, de amenabilidad. Se trata de las llamadas **álgebras completamente amenables** (o **super-amenables**), **amenables** y **débilmente amenables**. Precisamente, un álgebra de Banach $\mathfrak{U}$ es completamente amenable si $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}) = \{0\}$ cualquiera sea el $\mathfrak{U}-$bimódulo de Banach $\mathbb{E}$. Por otra parte, $\mathfrak{U}$

se dice débilmente amenable si $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{U}^*) = \{0\}$. Evidentemente toda álgebra completamente amenable es amenable y toda álgebra amenable es débilmente amenable.

La teoría de álgebras completamente amenables es la más desarrollada hasta la fecha, mientras que la correspondiente a álgebras débilmente amenables es la que ha mostrado más complejidad. Respecto de estas últimas se han logrado avances en el caso de algunas álgebras específicas. Por ejemplo, la amenabilidad débil de ciertas $C^*-$álgebras fue establecida en 1983 por U. Haagerup (cf. [12]). En 2002 se estableció que el álgebra de medidas finitas de Borel $\mathcal{M}\,(G)$ sobre un grupo localmente compacto $G$ es amenable toda vez que es débilmente amenable (cf. [6]). En la actualidad, además de investigaciones ligadas a dar un más acabado conocimiento de estos tipos de amenabilidad, se recurre a nuevos tipos de amenabilidad. Por ejemplo, (v. [9]), amenabilidad por ideales (un álgebra de Banach $\mathfrak{U}$ es idealmente amenable si y sólo si $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{I}^*) = \{0\}$ cualquiera sea el ideal cerrado $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{U}$). Cabe mencionar que está abierta aún la cuestión acerca de la identificación de álgebras amenables y débilmente amenables en el caso de álgebras de Banach uniformes sobre un espacio compacto (cf. [1], p. 66). Asimismo, aún se desconoce la existencia de algún espacio de Banach infinito dimensional $\mathbb{E}$ tal que la correspondiente álgebra $\mathcal{B}\,(\mathbb{E})$ de operadores acotados sea amenable. Este problema planteado por B. Johnson en [21] en 1972, aún no resuelto, muestra con crudeza los límites de una teoría todavia incipiente de amenabilidad. Más aún, se sabe que este resultado es negativo para espacios de Hilbert y quizás sea más accesible decidir la cuestión para $\mathbb{E} = l^p$ con $p \in (1,\infty)\setminus\{2\}$ (V.[33], Open Problems 8 and 9, p. 222-223). Respecto de la amenabilidad de álgebras de operadores sobre espacios de Banach también se está en una etapa inicial de investigación. Se ha podido decidir la amenabilidad del álgebra de operadores compactos sobre los espacios $c_0$ y $l^p$ si $p \in (1,\infty)$. Si $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach general, la amenabilidad de las álgebras $\mathcal{K}\,(\mathbb{E})$ de operadores compactos sobre $\mathbb{E}$ o $\mathcal{A}\,(\mathbb{E})$ de operadores de aproximación finita sobre $\mathbb{E}$ ha sido establecida bajo condiciones relativamente generales en un profundo artículo de N. Grønbæk, B. Johnson y G. A. Willis (cf. [10]). Sin embargo se desconocen aún condiciones intrínsecas de $\mathbb{E}$ que determinen la amenabilidad de dichas álgebras en términos de su análisis funcional.

En esta monografía hemos optado por señalar la caracterización de álgebras amenables lograda por B. Johnson en [21], en el Teorema 4.2.33, mediante el recurso de **diagonales virtuales** y **diagonales aproximadas** (V. definiciones 4.2.15 y 4.2.16). Esta elección obedece a varias razones; por un lado el trabajo mencionado de B. Johnson representa sin duda un hito en el desarrollo de la teoría. En dicha memoria B. Johson logra una comprensión acabada de los denominados **grupos amenables**. El estudio de estos grupos tiene interés propio, sobre todo a partir de un celebrado teorema de S. Banach y A. Tarski, relacionado con un problema sobre teoría de la medida planteado por F. Hausdorff (cf. [2], [14]). Resultados sorprendentes y paradojas fáciles de deducir a partir del teorema de Banach- Tarski dieron lugar a la clasificación de grupos generales en amenables y no amenables. Sin embargo, las razones profundas de pertenencia a una u otra clase no se pudieron comprender hasta el advenimiento de la teoría de B. Johnson. En el caso de un grupo localmente compacto $G$ J. G. Wendel demostró, en 1952, que el álgebra $L^1(G)$ contiene una suerte de codificación con toda la información estructural de $G$. Es decir, si $G$ y $H$ son dos grupos localmente compactos, las álgebras de Banach $L^1(G)$ y $L^1(H)$ son isométricamente isomorfas si y sólo si $G$ y $H$ son grupos topológicos homeomorfos (cf. [37]). En definitiva, B. Johnson advirtió como caracterizar grupos amenables haciendo uso de esta suerte de invariantes asociados, en un contexto que admitía el empleo conjunto de técnicas de análisis funcional y de álgebra homológica. Una vez logrados los resultados de B. Johnson en esta dirección la introducción de la noción de amenabilidad ha resultado muy natural, planteándose luego la caracterización de álgebras amenables generales. Nos ha parecido oportuno abordar el teorema original de Johnson sobre amenabilidad de álgebras del tipo $L^1(G)$ y también considerar la amenabilidad en general. El empleo del primer grupo de cohomología es suficiente en principio. No obstante los grupos de cohomología de orden superior suelen dar información intrínseca sobre las álgebras de Banach subyacentes, aunque surgen problemas tanto al momento de determinarlos como al de interpretar los resultados que dichos grupos sugieren.

Se sabe que, en general, es más simple establecer algunos resultados en el caso de álgebras con unidad. No obstante, hay una amplia diversidad de álgebras de Banach no unitarias cuyo estudio tiene en muchos casos interés propio. Hay diversas maneras de sumergir un álgebra de Banach no unitaria dada en un álgebra de Banach con unidad. Nosotros vamos a seguir la construcción usual, i.e., si $\mathfrak{U}$ es un álgebra de Banach no unitaria indicaremos $\mathfrak{U}^\sharp = \mathfrak{U} \times \mathbb{C}$. En $\mathfrak{U}^\sharp$ se define la estructura natural de $\mathbb{C}-$álgebra dada mediante las siguientes operaciones: si $\lambda$, $\mu$, $\tau \in \mathbb{C}$ y $a$, $b \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} \tau(a,\lambda) + (b,\mu) &= (\tau \cdot a + b, \tau \cdot \lambda + \mu), \\ (a,\lambda) \cdot (b,\mu) &= (a \cdot b + \mu \cdot a + \lambda \cdot b, \lambda \cdot \mu). \end{aligned}$$

En particular, $\mathfrak{U}^\sharp$ resulta ser un álgebra unitaria sobre $\mathbb{C}$, cuya identidad es $e = (0,1)$. Definiendo $\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$ si $a \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\left(\mathfrak{U}^\sharp, \|\cdot\|\right)$ es un álgebra de Banach unitaria, $\|e\| = 1$ y $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{U}^\sharp$, de modo que $\mathfrak{U}$ se sumerge isométricamente en $\mathfrak{U}^\sharp$ realizándose como un ideal cerrado. Afortunadamente la amenabilidad goza de ciertas propiedades hereditarias que son deseables. En general, no es cierto que subálgebras de Banach de álgebras amenables sean amenables. Sin embargo, veremos que el Lema 4.2.18 y el Corolario 4.2.19 nos permitirán remitir, sin pérdida de generalidad, la caracterización de amenabilidad al caso de álgebras unitarias.

**Definición 4.2.15.** Por **diagonal virtual** de $\mathfrak{U}$ entendemos a todo elemento $M \in \left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{**}$ tal que $\pi^{**}(M) \cdot a = a$ y $a \cdot M = M \cdot a$ si $a \in \mathfrak{U}$, donde $\pi : \mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ es la aplicación única lineal tal que $\pi(a \otimes b) = a \cdot b$ cualquiera sean $a, b \in \mathfrak{U}$.

**Definición 4.2.16.** Por **diagonal aproximada** de $\mathfrak{U}$ se entiende toda red acotada $\{m_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}$ tal que $\lim_{\alpha \in A}(a \cdot m_\alpha - m_\alpha \cdot a) = 0$ y además $\lim_{\alpha \in A}(a \cdot \pi(m_\alpha)) = a$ para cualquier $a \in \mathfrak{U}$.

**Observación 4.2.17.** Por el Ej. 4.2.2 y el Corolario 4.2.14 hay definidas sendas estructuras de $\mathfrak{U}-$bimódulo en $\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}$, en $\left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{**}$ y en $\mathfrak{U}^{**}$. Además, la existencia de una aplicación $\pi$ en las condiciones anteriores está garantizada por la propiedad universal que define a todo producto tensorial. Por esta razón, las definiciones anteriores son correctas.

**Lema 4.2.18.** *Sea $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach y sea $\mathfrak{I}$ un ideal cerrado de $\mathfrak{U}$ tal que $\mathfrak{I}$ y $\mathfrak{U}/\mathfrak{I}$ son amenables. Entonces $\mathfrak{U}$ es amenable.*

*Demostración.* Sea $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}-$bimódulo de Banach y sea $D \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$. Entonces la restricción de $D$ a $\mathfrak{I}$ es una derivación en $\mathcal{Z}^1(\mathfrak{I}, \mathbb{E}^*)$. Como $\mathfrak{I}$ es amenable existe $\phi \in \mathbb{E}^*$ tal que $Da = a \cdot \phi - \phi \cdot a$ si $a \in \mathfrak{I}$. Sea $\widetilde{D} = D - \mathrm{ad}_\phi$. Entonces la restricción de $\widetilde{D}$ a $\mathfrak{I}$ es cero pues $D$ coincide con $\mathrm{ad}_\phi$ en $\mathfrak{I}$. Indicando $\pi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{I}$ a la proyección al cociente, haciendo $\widetilde{\widetilde{D}}(\psi) = \widetilde{D}(a)$ si $\psi = \pi(a)$, queda inducida una aplicación $\widetilde{\widetilde{D}} : \mathfrak{U}/\mathfrak{I} \to \mathbb{E}^*$. Si $\psi = \pi(a) = \pi(\acute{a})$ entonces $a - \acute{a} \in \mathfrak{I}$, de modo que $\widetilde{D}(a) = \widetilde{D}(\acute{a})$ y por lo tanto $\widetilde{\widetilde{D}}$ está bien definida. Sea $\mathbb{E}_0$ la cápsula cerrada lineal generada por elementos de la forma $a \cdot x \cdot b$, con $a, b \in \mathfrak{I}$ y $x \in \mathbb{E}$. Sea también

$$\mathbb{F} = \{\psi \in \mathbb{E}^* : a \cdot \psi = \psi \cdot a = 0 \text{ si } a \in \mathfrak{I}\}.$$

Entonces $\mathbb{F} \approx (\mathbb{E}/\mathbb{E}_0)^*$, donde $\approx$ indica isomorfismos de $\mathfrak{U}/\mathfrak{I}-$bimódulos de Banach. En efecto, sea $\Theta : \mathbb{F} \to (\mathbb{E}/\mathbb{E}_0)^*$ tal que si $\psi \in \mathbb{F}$ resulta $\Theta(\psi)(p(x)) = \psi(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{E}$,donde $p$:$\mathbb{E} \to \mathbb{E}/\mathbb{E}_0$ es la proyección al cociente. Si fuere $p(x) = p(\acute{x})$ entonces $x - \acute{x} \in \mathbb{E}_0$, y podemos escribir $x - \acute{x} = \lim_n \sum_{j=1}^{j(n)} a_n^j \cdot x_n^j \cdot b_n^j$ con $a_n^j, b_n^j \in \mathfrak{I}$, $x_n^j \in \mathbb{E}$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle x, \psi\rangle - \langle \acute{x}, \psi\rangle &= \langle x - \acute{x}, \psi\rangle \\ &= \lim_n \sum_{j=1}^{j(n)} \left\langle a_n^j \cdot x_n^j \cdot b_n^j, \psi\right\rangle = \lim_n \sum_{j=1}^{j(n)} \left\langle x_n^j, b_n^j \cdot \psi \cdot a_n^j\right\rangle = 0,\end{aligned}$$

por lo tanto $\Theta(\psi)$ está bien definida, resultando $\Theta(\psi) : \mathbb{E}/\mathbb{E}_0 \to \mathbb{C}$ lineal y

$$|\Theta(\psi)(p(x))| = |\psi(x)| \leq \|\psi\| \|x\|$$

si $x \in \mathbb{E}$. Luego, $|\Theta(\psi)(p(x))| \leq \|\psi\| \|p(x)\|$ para cualquier $x$, i.e. $\|\Theta(\psi)\| \leq \|\psi\|$ y así $\Theta \in \mathcal{B}(\mathbb{F}, (\mathbb{E}/\mathbb{E}_0)^*)$. Suponiendo $\Theta(\psi) = 0$ entonces $\psi(x) = 0$ si $x \in \mathbb{E}$, o sea $\psi = 0$. Por otra parte dada $S \in (\mathbb{E}/\mathbb{E}_0)^*$ es fácil ver que $S \circ p \in \mathbb{F}$ y además $\Theta(S \circ p) = S$. Por el teorema de la función abierta concluimos que $\Theta$ es un homeomorfismo de espacios de Banach. Si escribimos

$$\pi(a) \cdot \psi \triangleq a \cdot \psi, \psi \cdot \pi(b) \triangleq \psi \cdot b, \tag{4.26}$$

donde $a, b \in \mathfrak{U}$ y $\psi \in \mathbb{F}$, es fácil verificar que (4.26) define una acción de $\mathfrak{U}/\mathfrak{I}-$bimódulo de Banach sobre $\mathbb{F}$. En consecuencia, haciendo para $a, b \in \mathfrak{U}$ y $\lambda \in (\mathbb{E}/\mathbb{E}_0)^*$:

$$\pi(a) \cdot \lambda \cdot \pi(b) \triangleq \Theta\left(\pi(a) \cdot \Theta^{-1}(\lambda) \cdot \pi(b)\right), \tag{4.27}$$

queda definida una acción de $\mathfrak{U}/\mathfrak{I}-$bimódulo de Banach sobre $(\mathbb{E}/\mathbb{E}_0)^*$. Es fácil verificar que (4.27) está bien definida y que respecto de la acción resultante $\Theta$ deviene en un homomorfismo de $\mathfrak{U}/\mathfrak{I}-$bimódulos de Banach. Notemos que si $a \in \mathfrak{I}$ y $b \in \mathfrak{U}$ tenemos

$$a \cdot \widetilde{\widetilde{D}}(\pi(b)) = a \cdot \widetilde{D}(b) = \widetilde{D}(a \cdot b) - \widetilde{D}(a) \cdot b = 0,$$

y análogamente $\widetilde{\widetilde{D}}(\pi(b)) \cdot a = 0$, o sea $\widetilde{\widetilde{D}}(\mathfrak{U}/\mathfrak{I}) \subseteq \mathbb{F}$. Observando que $\pi$ es un homomorfismo de $\mathfrak{U}-$bimódulos se deduce que $\Theta \circ \widetilde{\widetilde{D}} \in \mathscr{Z}^1(\mathfrak{U}/\mathfrak{I}, (\mathbb{E}/\mathbb{E}_0)^*)$. Puesto que $\mathfrak{U}/\mathfrak{I}$ se asume amenable existe un elemento $\lambda \in (\mathbb{E}/\mathbb{E}_0)^*$ tal que $\Theta \circ \widetilde{\widetilde{D}} = \mathrm{ad}_\lambda$. Luego, dado $a \in \mathfrak{U}$ obtenemos

$$\Theta(D(a) - \mathrm{ad}_\phi(a)) = \Theta\, \widetilde{D}(a) = \Theta\, \widetilde{\widetilde{D}}(\pi(a)) = \lambda \cdot \pi(a) - \pi(a) \cdot \lambda$$

y usando (4.26)

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(a) &= D(a) - \mathrm{ad}_\phi(a) \\
&= \Theta^{-1}(\lambda) \cdot \pi(a) - \pi(a) \cdot \Theta^{-1}(\lambda) \\
&= \Theta^{-1}(\lambda) \cdot a - a \cdot \Theta^{-1}(\lambda) = \mathrm{ad}_{\Theta^{-1}(\lambda)}(a),
\end{aligned}$$

o sea $D = \mathrm{ad}_{\phi + \Theta^{-1}(\lambda)}$. □

**Corolario 4.2.19.** *Un álgebra de Banach $\mathfrak{U}$ es amenable sí y sólo sí $\mathfrak{U}^\sharp$ es amenable.*

*Demostración.* Evidentemente $\mathbb{C}$ es un álgebra amenable. Asumiendo que $\mathfrak{U}$ es amenable, puesto que $\mathfrak{U}$ es además un ideal cerrado de $\mathfrak{U}^\sharp$ y las álgebras de Banach $\mathfrak{U}^\sharp/\mathfrak{U}$ y $\mathbb{C}$ son isométricamente isomorfas, por el lema (4.2.18) $\mathfrak{U}^\sharp$ resulta amenable. Recíprocamente, sean $\mathfrak{U}^\sharp$ amenable, $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}$-bimódulo y $D \in \mathscr{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$. Notemos que $D$ se extiende naturalmente a una derivación $\widetilde{D}$ sobre $\mathfrak{U}^\sharp$, la cual necesariamente es nula en $e$. En consecuencia $\widetilde{D}$, y por lo tanto $D$, son ambas internas. □

# Álgebra homológica y análisis funcional

## Grupos de homología de orden superior

Sean $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach, $\mathfrak{X}$ un $\mathfrak{U}-$módulo de Banach y consideremos el siguiente complejo:

$$\widehat{\otimes}_1^n \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X} \ \underrightarrow{d_n}\ \widehat{\otimes}_1^{n-1} \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X} \ \underrightarrow{d_{n-1}}\ \ldots \ \underrightarrow{d_3}\ \widehat{\otimes}_1^2 \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X} \ \underrightarrow{d_2}\ \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X} \ \underrightarrow{d_1}\ \mathfrak{X} \ \underrightarrow{d_0}\ 0.$$

Estamos indicando $d_1(a\widehat{\otimes}x) = x \cdot a - a \cdot x$ y, si $n > 1$:

$$\begin{aligned} d_n(a_1\widehat{\otimes}a_2......\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}x_n) &= a_2\widehat{\otimes} \,...\, \widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}\,(xa_1) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \, a_1\widehat{\otimes} \,...\, \widehat{\otimes}\,(a_i a_{i+1})\,\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}x \\ &+ (-1)^n \, a_1\widehat{\otimes} \,...\, \widehat{\otimes}a_{n-1}\widehat{\otimes}\,(a_n x)\,. \end{aligned}$$

Tenemos que $d_n$ es continua y $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para cualquier $n$. Indicaremos mediante $\mathcal{H}_n\left(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}\right) = \ker\left(d_n\right)/\operatorname{Im}\left(d_{n+1}\right)$, al $n-$grupo de homología de $\mathfrak{U}$ con coeficientes en $\mathfrak{X}$. Más aún se trata de un espacio vectorial y es un espacio de Banach si $\operatorname{Im}\,(d_{n+1})$ es cerrado.

**Proposición 4.2.20.** $(\widehat{\otimes}_1^n\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X})^* \approx \mathcal{B}^n\left(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*\right)$*, donde* $\approx$ *indica isomorfismo de espacios de Banach.*

*Demostración.* Sea $\Lambda_n : (\widehat{\otimes}_1^n\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X})^* \to \mathfrak{B}^n\left(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*\right)$ tal que

$$\left(\Lambda_n\phi\right)\left(a_1, ..., a_n\right)x = \phi(a_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}x),$$

donde $\phi \in (\widehat{\otimes}_1^n\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X})^*$, $a_1, ..., a_n \in \mathfrak{U}$ y $x \in \mathfrak{X}$. Es fácil ver que $\Lambda_n$ está bien definida, que es lineal y acotada. Dada $\psi \in \mathfrak{B}^n\left(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*\right)$, la aplicación

$$\left(a_1, ..., a_n, x\right) \ \underrightarrow{\Psi}\ \psi\left(a_1, ..., a_n\right)x$$

es $(n+1)-$lineal. Por la Proposición 4.2.13 existe una única aplicación $\widetilde{\psi} \in (\widehat{\otimes}_1^n\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X})^*$ tal que

$$\widetilde{\psi}\left(a_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}x\right) = \psi\left(a_1, ..., a_n\right)x$$

y $\left\|\widetilde{\psi}\right\| = \|\Psi\|$. Definiendo $\Gamma_n\left(\psi\right) = \widetilde{\psi}$ queda definida $\Gamma_n : \mathfrak{B}^n\left(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*\right) \to (\widehat{\otimes}_1^n\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X})^*$. Evidentemente $\Gamma_n$ es lineal y

$$\begin{aligned} \left\|\Gamma_n\left(\psi\right)\right\| &= \left\|\widetilde{\psi}\right\| \\ &= \|\Psi\| \\ &= \sup\left\{\left|\psi\left(a_1, ..., a_n\right)x\right| : \|a_1\| = ... = \|a_n\| = \|x\| = 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\left\|\psi\left(a_1, ..., a_n\right)\right\| : \|a_1\| = ... = \|a_n\| = 1\right\} \\ &= \|\psi\|\,, \end{aligned}$$

o sea $\Gamma_n$ es acotada. Es fácil verificar que $\Lambda_n \circ \Gamma_n = \mathrm{Id}_{\mathfrak{B}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*)}$. Además, si $\phi \in$

$(\widehat{\otimes}_1^n \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X})^*$ y $u = \sum\limits_{i=1}^{s} a_1^i \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} a_n^i \widehat{\otimes} x^i$ en $\widehat{\otimes}_1^n \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_n (\Lambda_n \phi) u &= \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\Lambda_n \phi} \, (a_1^i \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} a_n^i \widehat{\otimes} x^i) \\
&= \sum_{i=1}^{s} (\Lambda_n \phi) \, (a_1^i, \ \ldots, a_n^i) x^i \\
&= \sum_{i=1}^{s} \phi(a_1^i \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} a_n^i \widehat{\otimes} x^i) = \phi(u),
\end{aligned}$$

i.e. $\Gamma_n \circ \Lambda_n = \mathrm{Id}_{(\widehat{\otimes}_1^n \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X})^*}$ . □

**Observación 4.2.21.** Por la Prop. 4.2.20, si $n \in \mathbb{N}$ existe un operador $\delta^n$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
(\widehat{\bigotimes}_1^{n-1} \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X})^* & \overset{d_n^*}{\rightarrow} & (\widehat{\bigotimes}_1^{n} \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X})^* \\
\downarrow \Lambda_{n-1} & & \downarrow \Lambda_n \\
\mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*) & \overset{\delta^n}{\rightarrow} & \mathcal{B}^{n}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*) .
\end{array}$$

En particular, indicamos $\widehat{\bigotimes}_1^0 \mathfrak{U} \widehat{\otimes} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, $\mathcal{B}^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*) = \mathfrak{X}^*$ y $\Lambda_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{X}^*}$ .

**Observación 4.2.22.** Si $\Psi \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*)$, $a_1, ..., a_n \in \mathfrak{U}$, $x \in \mathfrak{X}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(\delta^n \Psi)(a_1, ..., a_n)(x) &= \Lambda_n \left( d_n^* \, \Lambda_{n-1}^{-1} \, \Psi \right) (a_1, \ \ldots, a_n)(x) \\
&= \left( d_n^* \, \Lambda_{n-1}^{-1} \, \Psi \right) \left( a_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} a_n \widehat{\otimes} x \right) \\
&= \left( \Lambda_{n-1}^{-1} \, \Psi \right) \, d_n \left( \widehat{a_1 \otimes \ldots} \widehat{\otimes} a_n \widehat{\otimes} x \right) \\
&= \left( \Lambda_{n-1}^{-1} \, \Psi \right) \left\{ a_2 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} a_n \widehat{\otimes} (x \cdot a_1) \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \, a_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} (a_i \cdot a_{i+1}) \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} a_n \widehat{\otimes} x \\
&+ \left. (-1)^n \, a_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} a_{n-1} \widehat{\otimes} (a_n \cdot x) \right\} \\
&= \Psi(a_2, \ \ldots, a_n)(x \cdot a_1) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \, \Psi(a_1, \ \ldots, a_i \cdot a_{i+1}, ..., a_n)(x) \\
&+ (-1)^n \, \Psi(a_1, ..., a_{n-1})(a_n \cdot x) \\
&= \{ a_1 \Psi(a_2, \ \ldots, a_n) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \, \Psi(a_1, \ \ldots, a_i . a_{i+1}, \ \ldots, a_n) \\
&+ (-1)^n \, \Psi(a_1, \ \ldots, a_{n-1}) \cdot a_n \} (x)
\end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned}\delta^n \Psi\left(a_1, ..., a_n\right) &= a_1 \Psi\left(a_2,\ \dots,a_n\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}\left(-1\right)^i \Psi\left(a_1,\ \dots,a_i \cdot a_{i+1},\ \dots,a_n\right) \\ &+ \left(-1\right)^n \Psi\left(a_1,\ \dots,a_{n-1}\right)\cdot a_n.\end{aligned} \tag{4.28}$$

En particular, notar que $\ker\left(\delta^2\right) = \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*)$ y $\delta^1(x^*) = \mathrm{ad}_{x^*}$ para cada $x^* \in \mathfrak{X}^*$.

**Observación 4.2.23.** Más generalmente, obtenemos el siguiente complejo

$$0 \ \underset{\rightarrow}{\delta^0} \ \mathbb{Y} \ \underset{\rightarrow}{\delta^1} \ \mathcal{B}^1\left(\mathfrak{U},\mathbb{Y}\right) \ \underset{\rightarrow}{\delta^2} \ \mathcal{B}^2\left(\mathfrak{U},\mathbb{Y}\right) \ \underset{\rightarrow}{\delta^3} \ \dots \tag{4.29}$$

de modo que si $\Psi \in \mathcal{B}^{n-1}\left(\mathfrak{U},\mathbb{Y}\right)$ se evalúa $\delta^n\Psi$ mediante (4.28). El complejo (4.29) puede ser definido para todo $\mathfrak{U}-$módulo de Banach $\mathbb{Y}$. Para cada $n$ resulta $\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0$. Escribiendo $\mathcal{Z}^n\left(\mathfrak{U},\mathbb{Y}\right) = \ker\left(\delta^{n+1}\right)$ y $\mathcal{N}^n\left(\mathfrak{U},\mathbb{Y}\right) = \mathrm{Im}\left(\delta^n\right)$ queda definido el grupo de cohomología de orden $n$ de $\mathfrak{U}$ con coeficientes en $\mathbb{Y}$:

$$\mathcal{H}^n\left(\mathfrak{U},\mathbb{Y}\right) = \frac{\mathcal{Z}^n\left(\mathfrak{U},\mathbb{Y}\right)}{\mathcal{N}^n\left(\mathfrak{U},\mathbb{Y}\right)}.$$

**Observación 4.2.24.** Si $n \in \mathbb{N}$ resultan $\ker\left(\delta^n\right) = \Lambda_{n-1}\left(\ker\left(d_n^*\right)\right)$ y $\mathrm{Im}\,\delta^n = \Lambda_n\left(\mathrm{Im}\ \left(d_n^*\right)\right)$.

## Teoremas de reducción

La teoría de Hochschild (cf. [18], [19]) es aplicable en el contexto de álgebras de Banach. En la Prop. 4.2.25 introduciremos estructuras de $\mathfrak{U}-$bimódulo de Banach sobre $\widehat{\bigotimes}_1^n \mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}$ y $\mathcal{B}^n\left(\mathfrak{U},\mathfrak{X}\right)$. Luego, en la Prop. 4.2.26 veremos que la evaluación de los grupos de homología y cohomología de orden superior puede reducirse a la de los grupos de primer orden. Esto no significa que los grupos de orden superior tengan menor importancia, ya que aunque en teoría el proceso de reducción es posible, en la práctica la evaluación presenta importantes problemas de cálculo.

**Proposición 4.2.25.** *Hay estructuras de $\mathfrak{U}-$bimódulos de Banach sobre $\widehat{\bigotimes}_1^n \mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}$ y $\mathcal{B}^n\left(\mathfrak{U},\mathfrak{X}\right)$.*

*Demostración.* Notemos que $\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}$ es un $\mathfrak{U}$-bimódulo si escribimos

$$(a\widehat{\otimes}x)\cdot b = a\widehat{\otimes}(x\cdot b),\, b\cdot(a\widehat{\otimes}x) = \left(b\cdot a\right)\widehat{\otimes}x - b\widehat{\otimes}(a\cdot x) \tag{4.30}$$

para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{U}$, $x \in \mathfrak{X}$. Que (4.30) define la estructura requerida se deduce al linealizar las aplicaciones $\mathbb{C}$-bilineales $(a,x) \to a\widehat{\otimes}(x\cdot b)$ y $(a,x) \to \left(b\cdot a\right)\widehat{\otimes}x - b\widehat{\otimes}(a\cdot x)$

de $\mathfrak{U}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}$ vía la universalidad del producto tensorial. En particular, si $a,b,c\in\mathfrak{U}$, $x\in\mathfrak{X}$ entonces

$$\left[(a\widehat{\otimes}x)\cdot b\right]\cdot c=\left[a\widehat{\otimes}(x\cdot b)\right]\cdot c=a\widehat{\otimes}\left((x\cdot b)\cdot c\right)=a\widehat{\otimes}(x\cdot(c\cdot b))=\left(a\widehat{\otimes}x\right)\cdot(c\cdot b)\,,$$

y también

$$\begin{aligned}c\cdot\left[b\cdot(a\widehat{\otimes}x)\right]&=c\cdot\left((b\cdot a)\,\widehat{\otimes}x\right)-c\cdot\left(b\widehat{\otimes}(a\cdot x)\right)\\&=(c\cdot(b\cdot a))\,\widehat{\otimes}x-c\widehat{\otimes}\left((b\cdot a)\cdot x\right)-(c\cdot b)\,\widehat{\otimes}\,(a\cdot x)+c\widehat{\otimes}\,(b\cdot(a\cdot x))\\&=(c\cdot b)\cdot(a\widehat{\otimes}x).\end{aligned}$$

Puesto que el producto tensorial es asociativo, por inducción se define una estructura de $\mathfrak{U}-$bimódulo sobre $\widehat{\bigotimes}_1^n\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}$ haciendo

$$\left(a_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}x\right)\cdot b=a_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}\,(x\cdot b)\tag{4.31}$$

si $a_1,...,a_n\in\mathfrak{U}$,si $x\in\mathfrak{X}$ y si $b\in\mathfrak{U}$. Por otra parte

$$\begin{aligned}b\cdot\left(a_1\widehat{\otimes}a_2\widehat{\otimes}x\right)&=(ba_1)\,\widehat{\otimes}\,\left(a_2\widehat{\otimes}x\right)-b\widehat{\otimes}\,\left(a_1\cdot\left(a_2\widehat{\otimes}x\right)\right)\\&=(ba_1)\,\widehat{\otimes}a_2\widehat{\otimes}x-b\widehat{\otimes}\,(a_1a_2)\,\widehat{\otimes}x+b\widehat{\otimes}a_1\widehat{\otimes}\,(a_2x)\end{aligned}$$

En general;

$$\begin{aligned}b\cdot\left(a_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}x\right)&=(ba_1)\,\widehat{\otimes}a_2\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}x\\&\quad+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\,b\widehat{\otimes}a_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_i.a_{i+1}\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}x\\&\quad+(-1)^p\,b\widehat{\otimes}a_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}\,(a_nx)\,.\end{aligned}$$

La estructura de $\mathfrak{U}-$módulo sobre $\mathcal{B}^n\left(\mathfrak{U},\mathfrak{X}\right)$ se define mediante las fórmulas;

$$\begin{aligned}(aT)\,(a_1,...,a_n)&=aT\,(a_1,...,a_n)\\(Ta)\,(a_1,...,a_n)&=T\,(aa_1,...,a_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\,T\,(aa_1,...,a_ia_{i+1,...}a_n)+\\&\quad(-1)^n\,T\,(aa_1,...,a_{n-1})\,a_n\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.2.26.**

**(i)** $\mathcal{H}_{n+p}\left(\mathfrak{U},\mathfrak{X}\right)\approx\mathcal{H}_n\left(\mathfrak{U},\widehat{\bigotimes}_1^p\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}\right)$.

**(ii)** $\mathcal{H}^{n+p}\left(\mathfrak{U},\mathfrak{X}\right)\approx\mathcal{H}^n\left(\mathfrak{U},\mathcal{B}^p\left(\mathfrak{U},\mathfrak{X}\right)\right)$.

*Demostración.* **(i)** Formalmente, sabemos que hay isomorfismos

$$i_{n,p}:\widehat{\bigotimes}_1^n\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\left(\widehat{\bigotimes}_1^p\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}\right)\to\widehat{\bigotimes}_1^{n+p}\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X},$$

$$i_{n,p}\left(a_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_n\widehat{\otimes}(a_{n+1}\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}a_{n+p}\widehat{\otimes}x)\right)=a_1\widehat{\otimes}......\widehat{\otimes}a_{n+p}\widehat{\otimes}x.$$

Entonces existen operadores $D$́s tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{\bigotimes}_1^{n+1}\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\left(\widehat{\bigotimes}_1^p\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}\right) & \xrightarrow{D_{n+1}} & \widehat{\bigotimes}_1^{n}\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\left(\widehat{\bigotimes}_1^p\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}\right) & \xrightarrow{D_n} & \widehat{\bigotimes}_1^{n-1}\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\left(\widehat{\bigotimes}_1^p\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}\right)\\
\downarrow i_{n+1,p} & & \downarrow i_{n,p} & & \downarrow i_{n-1,p}\\
\widehat{\bigotimes}_1^{n+p+1}\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X} & \xrightarrow{d_{n+p+1}} & \widehat{\bigotimes}_1^{n+p}\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X} & \xrightarrow{d_{n+p}} & \widehat{\bigotimes}_1^{n+p-1}\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}
\end{array}$$

En consecuencia

$$\mathcal{H}_{n+p}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})=\frac{\ker(d_{n+p})}{\operatorname{Im}(d_{np+1})}=\frac{i_{n,p}(\ker D_n)}{i_{n,p}(\operatorname{Im}D_{n+1})}\approx\mathcal{H}_n(\mathfrak{U},\mathcal{H}_p(\mathfrak{U},\mathfrak{X}))$$

**(ii)** Las aplicaciones

$$i^{n,p}:\mathcal{B}^{n+p}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})\to\mathcal{B}^n(\mathfrak{U},L^p(\mathfrak{U},\mathfrak{X}))$$

$$(i^{n,p}\phi)(a_1,...,a_n)(a_{n+1},...,a_{n+p})=\phi(a_1,...,a_{n+p})$$

definen sendos isomorfismos $\mathcal{B}^{n+p}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})\approx\mathcal{B}^n(\mathfrak{U},\mathcal{B}^p(\mathfrak{U},\mathfrak{X}))$. Hay entonces aplicaciones $\Delta$́s para las cuales el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{B}^{n+p-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\delta^{n+p}} & \mathcal{B}^{n+p}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\delta^{n+p+1}} & \mathcal{B}^{n+p+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})\\
\downarrow i^{n-1,p} & & \downarrow i^{n,p} & & \downarrow i^{n+1,p}\\
\mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathcal{B}^p(\mathfrak{U},\mathfrak{X})) & \xrightarrow{\Delta^n} & \mathcal{B}^{n}(\mathfrak{U},\mathcal{B}^p(\mathfrak{U},\mathfrak{X})) & \xrightarrow{\Delta^{n+1}} & \mathcal{B}^{n+1}(\mathfrak{U},\mathcal{B}^p(\mathfrak{U},\mathfrak{X}))
\end{array}$$

Ahora

$$\mathcal{H}^{n+p}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})=\frac{\ker(\delta^{n+p+1})}{\operatorname{Im}(\delta^{n+p})}=\frac{(i^{n,p})^{-1}(\ker(\Delta^{n+1}))}{(i^{n,p})^{-1}(\operatorname{Im}(\Delta^n))}\approx\mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{B}^p(\mathfrak{U},\mathfrak{X}))$$

□

## Sobre el rango de ciertos operadores

De la construcción de los complejos de Hochschild sigue que, para lograr una correcta adecuación al marco de álgebras de Banach, es necesario precisar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales los rangos de ciertos operadores sean cerrados. Esto es necesario pues procuramos garantizar condiciones bajo las cuales algunos cocientes admitan estructuras de espacios de Banach.

**Lema 4.2.27.** *Sean $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espacios de Banach y $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Entonces $S\mathbb{X}$ es cerrado si y solo si $S^*\mathbb{Y}^*$ es cerrado.*

*Demostración.* Sean $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $Q : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/S^{-1}(0)$ la proyección al cociente y $J : \overline{S(\mathbb{X})} \to \mathbb{Y}$ la inyección natural . Dado $\alpha \in \mathbb{X}/S^{-1}(0)$ escribiremos $S_0(\alpha) = S(x)$ si $Q(x) = \alpha$. Es fácil ver que queda bien definida una aplicación $S_0 \in \mathcal{B}\left(\mathbb{X}/S^{-1}(0), \overline{S(\mathbb{X})}\right)$. Asimismo, se obtiene que $S = J \circ S_0 \circ Q$ y $S_0$ es inyectivo. Luego $S^* = Q^* S_0^* J^*$ y como $\operatorname{Im}(S_0)$ es densa en $\overline{S(\mathbb{X})}$ entonces $S_0^*$ es inyectivo. Precisamente, si $S_0^*(\Psi) = 0$ para cierto $\Psi \in \overline{S(\mathbb{X})}$ entonces

$$0 = S_0^*(\Psi)(Q(x)) = (\Psi \circ S_0)(Q(x)) = \Psi(S_0(Q(x))) = \Psi(S(x)),$$

de donde $\Psi = 0$.Veremos que:

**(i)** $J^*$ es suryectiva,

**(ii)** $\operatorname{Im}(S) = \operatorname{Im}(S_0)$,

**(iii)** $Q^*(\operatorname{Im}(S_0^*)) = \operatorname{Im}(S^*)$ y $Q^*$ es cerrada,

**(iv)** $\operatorname{Im}(S_0^*)$ es cerrada si y solo si $\operatorname{Im}(S^*)$ es cerrada.

Luego podremos asumir que $S$ es inyectivo y tiene rango denso. En efecto, si $S$ fuera inyectivo con rango denso y además asumiéramos que el rango es cerrado, entonces $S$ sería un isomorfismo. Evidentemente, $S^*$ devendrá isomorfismo y la condición ha de ser necesaria. Recíprocamente, supongamos que $S$ es inyectiva, tiene rango denso e $\operatorname{Im}(S^*)$ es cerrada. Como $S$ tiene rango denso se deduce que $S^*$ es inyectiva. Aplicando el Teorema de la función abierta, hay entonces una aplicación $T : S^*\mathbb{Y}^* \to \mathbb{Y}^*$ tal que $T(S^*) = I_{Y^*}$. Dada $y^* \in \mathbb{Y}^*$, sea $|y^*| = \|S^* y^*\|$ . Luego

$$\|y^*\| = \|TS^*y^*\| \leq \|T\| \|S^*y^*\| = \|T\| |y^*|$$

Ahora $(\mathbb{Y}^*, |.|)$ es un espacio normado. Sea $B_{\mathbb{Y}}$ la bola cerrada unitaria de $\mathbb{Y}$ centrada en cero. Si $B_{\mathbb{Y}}^0$ es el polar de $B_{\mathbb{Y}}$ y $\mu_{B_{\mathbb{Y}}^0}$ es el funcional de Minkowski asociado entonces $\mu_{B_{\mathbb{Y}}^0} = \|.\|$ en $\mathbb{Y}^*$ (cf. [5], p. 103,126). Precisamente, si $y^* \in \mathbb{Y}^*$ entonces

$$\mu_{B_{\mathbb{Y}}^0}(y^*) = \inf\{t > 0 : \ y^*/t \in B_{\mathbb{Y}}^0\}$$

Dado $t > 0$ tal que $t^{-1}y^* \in B_{\mathbb{Y}}^0$, $|t^{-1}y^*(y)| \leq 1$ para cualquier $y \in B_{\mathbb{Y}}$, i.e. $\|y^*\| \leq t$, i.e. $\|y^*\| \leq \mu_{B_{\mathbb{Y}}^0}(y^*)$. Si $y^* \neq 0$ e $y \in B_{\mathbb{Y}}$ entonces $|y^*/\|y^*\|(y)| \leq 1$, i.e. $\|y^*\| \geq \mu_{B_{\mathbb{Y}}^0}(y^*)$. Por lo tanto, concluimos que $\|y^*\| = \mu_{B_{\mathbb{Y}}^0}(y^*)$.Evidentemente $\mu_{B_{\mathbb{Y}}^0}(0) = 0$. Análogamente, se verifica que $|y^*| = \mu_{(S(B_{\mathbb{X}}))^0}(y^*)$ si $y^* \in \mathbb{Y}^*$, donde $B_{\mathbb{X}}$ es la bola unitaria cerrada en $\mathbb{X}$ y $\mu_{(S(B_{\mathbb{X}}))^0}$ es el funcional de Minkowski de $(S(B_{\mathbb{X}}))^0$. Luego $\mu_{B_{\mathbb{Y}}^0} \leq \|T\| \cdot \mu_{(S(B_{\mathbb{X}}))^0}$, de donde $B_{\mathbb{Y}}^{00} \subseteq \|T\| (S(B_{\mathbb{X}}))^{00}$. Obtenemos entonces

$$B_{\mathbb{Y}} \subseteq B_{\mathbb{Y}}^{00} \subseteq \|T\| (S(B_{\mathbb{X}}))^{00}.$$

Como $S(B_{\mathbb{X}})$ es convexo y balanceado entonces $(S(B_{\mathbb{X}}))^{00} = \overline{S(B_{\mathbb{X}})}^{w}$ (cf. [**?**], p. 52, Prop. 3). Asimismo, $\overline{S(B_{\mathbb{X}})}^{w} = \overline{S(B_{\mathbb{X}})}$ pues $S(B_{\mathbb{X}})$ es convexo en un espacio vectorial localmente convexo (cf. [22], Prop. 1.3.3, p. 30). Luego $S(B_{\mathbb{X}})$ deviene denso en $B_{\mathbb{Y}}$ y $B_{\mathbb{Y}} \subseteq B_{\mathbb{Y}}^{00} \subseteq \overline{S(r \cdot B_{\mathbb{X}})}$, donde $r = \|T\|$. Desde luego podemos asumir que $T$ es no nulo. Luego

$$2^{-n} B_{\mathbb{Y}} \subseteq \overline{S(2^{-n} \cdot r \cdot B_{\mathbb{X}})}$$

si $n \geq 0$. Veamos que $\mathbb{Y} = S(\mathbb{X})$. Sea $y_0 \in \mathbb{Y}$, $y_0 \neq 0$; definimos $\widetilde{y_0} = y_0/(2\|y_0\|)$. Así existe $x_1 \in r \cdot B_{\mathbb{X}}$ tal que $\|\widetilde{y_0} - Sx_1\| < 2^{-1}$. Por inducción, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in 2^{-k+1} \cdot r \cdot B_{\mathbb{X}}$ tal que $\|\widetilde{y_0} - Sx_1 - ... - Sx_k\| \leq 2^{-k}$. Por construcción, la serie $\sum x_k$ es absolutamente convergente. Como $\mathbb{X}$ es completo está definido $x = \sum x_k$. Evidentemente, $\widetilde{y_0} = Sx$, o bien, $y_0 = S(2\|y_0\| x)$ y se sigue la tesis. Veamos que, efectivamente, la reducción al caso en que el operador $S$ se asume inyectivo y con rango denso es correcta. En efecto, si $\operatorname{Im}(S)$ es cerrada entonces por (ii) $\operatorname{Im}(S_0)$ es cerrada y, como $S_0$ es inyectivo, por el teorema de la función abierta $S_0$ es un isomorfismo. Puesto que

$$S^*(\mathbb{Y}^*) = Q^*(S_0^* J^* \mathbb{Y}^*) = Q^*\left(S_0^* \overline{S\mathbb{X}}^*\right) = Q^*\left(\left(\mathbb{X}/S^{-1}(0)\right)^*\right),$$

como por (i) $J^*$ es suryectiva, $S_0^*$ es un isomorfismo y por (iv) $Q^*$ es cerrada entonces $\operatorname{Im}(S^*)$ es cerrada. Recíprocamente, si $\operatorname{Im}(S^*)$ es cerrada por (iv) $\operatorname{Im}(S_0^*)$ también lo es. Luego, como $S_0$ es inyectivo y tiene rango denso podemos asegurar que $\operatorname{Im}(S_0)$ es cerrada y, por (ii) resulta $\operatorname{Im}(S)$ cerrada. Finalmente, (i) es cierto pues dado $\theta \in \overline{S(\mathbb{X})}^*$ por el Teorema de Hahn-Banach existe $\widetilde{\theta} \in \mathbb{Y}^*$ tal que $\widetilde{\theta}\mid_{\overline{S(\mathbb{X})}} = \theta$, i.e. $J^* \widetilde{\theta} = \theta$. El item (ii) es inmediato. Con respecto a (iii), notemos que es válida la siguiente identidad

$$\operatorname{Im}(Q^*) = \left\{x^* \in \mathbb{X}^* : S^{-1}(0) \subseteq \ker(x^*)\right\}. \tag{4.32}$$

Sea entonces $\{x_n^*\} \subseteq \operatorname{Im}(Q^*)$ tal que $x_n^* \to x^*$ en $\mathbb{X}^*$ y veamos que $x^* \in \operatorname{Im}(Q^*)$. Sea $x \in S^{-1}(0)$ y veamos que $x^*(x) = 0$. En efecto, escribiendo $x_n^* = Q^*(\zeta_n^*)$ para cada $n$, donde $\zeta_n^* \in (\mathbb{X}/S^{-1}(0))^*$, obtenemos

$$x_n^*(x) = Q^*(\zeta_n^*)(x) = \zeta_n^*(Q(x)) = 0,$$

y haciendo $n \to \infty$ sigue que $x^*(x) = 0$. Por (4.32) sigue la afirmación. En consecuencia, por el teorema de la función abierta, $Q^*$ es cerrada. Por otra parte, como $S^* = Q^* S_0^* J^*$ evidentemente $\operatorname{Im}(S^*) \subseteq Q^*(\operatorname{Im}(S_0^*))$. Además si $\theta \in \overline{S(X)}^*$, por (i) existe $y^* \in \mathbb{Y}^*$ tal que $Q^* S_0^* \theta = Q^* S_0^* J^* y^*$ i.e. $Q^* S_0^* \theta = S^* y^*$, de donde $Q^*(\operatorname{Im}(S_0^*)) \subseteq \operatorname{Im}(S^*)$. Supongamos ahora que $\operatorname{Im}(S^*)$ es cerrada y sea $S_0^* \alpha_n \to \beta$ en $(\mathbb{X}/S^{-1}(0))^*$. Para cada $n$ sea

$\widetilde{\alpha_n} \in \mathbb{Y}^*$ tal que $J^*\widetilde{\alpha_n} = \alpha_n$, i.e. $S_0^* J^*\widetilde{\alpha_n} \to \beta$. Entonces $S^*\widetilde{\alpha_n} \to Q^*\beta$. Como $\mathrm{Im}(S^*)$ es cerrada existe $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{Y}^*$ tal que $Q^*\beta = S^*\widetilde{\alpha}$. Luego si $x \in \mathbb{X}$

$$\beta(Q(x)) = \widetilde{\alpha}(S(x)) = \widetilde{\alpha}(JS_0Q(x)) = (\widetilde{\alpha}JS_0)(Q(x))$$

Entonces $\beta = \widetilde{\alpha}JS_0 = S_0^*(\widetilde{\alpha}J)$. Recíprocamente, sea $\mathrm{Im}(S_0^*)$ cerrada. Por (iii) $\mathrm{Im}(S^*)$ deviene cerrada. □

**Corolario 4.2.28.** *Sean* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ *espacios de Banach,* $S : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $T : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$, *operadores lineales, acotados y sea* $TS = 0$. *Entonces* $T\mathbb{Y}$ *es cerrado y* $\ker(T) = \mathrm{Im}(S)$ *si y solo si* $S^*\mathbb{Y}^*$ *es cerrado y* $\ker(S^*) = \mathrm{Im}(T^*)$.

*Demostración.* Supongamos que $T\mathbb{Y}$ es cerrado y $\ker(T) = \mathrm{Im}(S)$. Como $\mathrm{Im}(S)$ es cerrado por el Lema 4.2.27 $S^*\mathbb{Y}^*$ es cerrado. Como $TS = 0$ entonces $\mathrm{Im}\,(T^*) \subseteq \ker\,(S^*)$. Ahora sea $y^* \in \ker\,(S^*)$. Dado $y \in \mathbb{Y}$ sea $z_0^*\,(T\,(y)) \triangleq y^*\,(y)$. Entonces $z_0^*$ está bien definida, pues si $Ty = T\acute{y}$ entonces $y - \acute{y} \in \ker\,(T) = \mathrm{Im}\,(S)$. Si $x \in \mathbb{X}$ verifica que $y - \acute{y} = S\,(x)$ entonces $y^*\,(y - \acute{y}) = y^*\,(S\,(x)) = 0$. Evidentemente $z_0^* \in T\,(\mathbb{Y})^*$ y por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión $z^* \in \mathbb{Z}^*$ de $z_0^*$. Asimismo obtenemos

$$T^*z^* = z^* \circ T = z^* \mid_{\mathrm{Im}(T)} \circ T = z_0^* \circ T = y^*,$$

o sea $\ker\,(S^*) \subseteq \mathrm{Im}\,(T^*)$. Por lo tanto, $S^*\mathbb{Y}^*$ es cerrado y $\ker(S^*) = \mathrm{Im}(T^*)$. Recíprocamente, sea $S^*\mathbb{Y}^*$ cerrado y $\ker(S^*) = \mathrm{Im}(T^*)$. Entonces por el Lema 4.2.27 $T\mathbb{Y}$ deviene cerrado. Como $\mathrm{Im}\,(S^*)$ es cerrada por el lema anterior $\mathrm{Im}\,(S)$ es cerrada. Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned} \ker\,(S^*) &= \{y^* \in \mathbb{Y}^* : y^*\,(Sx) = 0 \forall x \in \mathbb{X}\}\,, \\ \mathrm{Im}\,(T^*) &= \{y^* \in \mathbb{Y}^* : y^*(y) = 0 \forall y \in \ker(T)\}\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Dado entonces $y_0 \in \mathbb{Y} - S(\mathbb{X})$ existe, por el teorema de Hahn- Banach, un funcional acotado $y^*$ sobre $\mathbb{Y}$ tal que $y^*(y_0) = 1$ e $y^* \mid_{S(\mathbb{X})} = 0$. Por (4.33) deducimos que $y^* \mid_{\ker(T)} = 0$, de modo que $y_0 \notin \ker(T)$. Como $TS = 0$ sigue la tesis. □

## Sobre la trivialidad de grupos de cohomología

**Lema 4.2.29.** *Sean* $\mathfrak{X}$ *un* $\mathfrak{U}$*-módulo de Banach y* $m \in \mathbb{N}$. *Entonces* $\mathcal{H}_n\,(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}) = \{0\}$ *si* $n \geq m$ *y* $\mathrm{Im}\,(d_m)$ *es cerrada si y solo si* $\mathcal{H}^n\,(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}^*) = \{0\}$ *para* $n \geq m$.

*Demostración.* Supongamos primero que $\mathcal{H}_n\,(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}) = \{0\}$ si $n \geq m$ y $\mathrm{Im}\,(d_m)$ es cerrado. Por el lema (4.2.27) sigue que $\mathrm{Im}\left(d_{m+1}^*\right)$ es cerrada y $\ker\left(d_{m+1}^*\right) = \mathrm{Im}\,(d_m^*)$. Así $\mathrm{Im}\,(\delta^{m+1})$ es cerrada y por (4.2.24) se cumple que $\Lambda_m^{-1}\,(\ker\,(\delta^{m+1})) = \Lambda_m^{-1}\,(\mathrm{Im}\,(\delta^m))$ o bien,

$$\ker\left(\delta^{m+1}\right) = \mathrm{Im}\,(\delta^m)$$

i.e. $\mathcal{H}^m(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*)=\{0\}$ y $\operatorname{Im}(\delta^{m+1})$ es cerrada. Si suponemos $\mathcal{H}_n(\mathfrak{U},\mathfrak{X})=\{0\}$ si $n\geq m$ entonces $\ker(d_n)=\operatorname{Im}(d_{n+1})$. En particular, $\operatorname{Im}(d_{m+1})$ es cerrada y $\mathcal{H}_{m+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})=\{0\}$ entonces $\mathcal{H}^{m+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})=0$ e inductivamente la condición es necesaria. Recíprocamente, si $\mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*)=\{0\}$ para cualquier $n\geq m$ entonces $\ker(\delta^{n+1})=\operatorname{Im}(\delta^n)$. En particular, como $\operatorname{Im}(\delta^n)=\Lambda_n(\operatorname{Im}(d_n^*))$ entonces $\operatorname{Im}(d_n^*)$ es cerrada, de donde $\operatorname{Im}(d_n)$ es cerrada si $n\geq m$. Además

$$\ker\left(\delta^{n+1}\right)=\Lambda_n\left(\ker\left(d_{n+1}^*\right)\right)=\Lambda_n\left(\operatorname{Im}\left(d_n^*\right)\right),$$

i.e. $\ker\left(d_{n+1}^*\right)=\operatorname{Im}(d_n^*)$ para cualquier $n$. Como $\operatorname{Im}(d_n^*)$ es cerrada entonces $\operatorname{Im} d_n$ es cerrada y $\mathcal{H}_n(\mathfrak{U},\mathfrak{X})=0$. Por el lema (4.2.27) se sigue la tesis si $n\geq m$. $\square$

**Lema 4.2.30.** *Sea $\mathfrak{X}$ un $\mathfrak{U}$-módulo de Banach, $\mathfrak{I}=\mathfrak{X}^*$. Entonces $\mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})=\{0\}$ si y solo si para cualquier $T\in\mathcal{Z}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})$ existe $S\in\mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{I}^{**})$ tal que $\delta^nS=T$.*

*Demostración.* La condición es evidentemente necesaria. Sean los operadores $T\in\mathcal{Z}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})$ y $S\in\mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{I}^{**})$ tales que $\delta^nS=T$. La inyección natural $i:\mathfrak{X}\hookrightarrow\mathfrak{X}^{**}$ es un $\mathfrak{U}$-módulo homomorfismo pues si $a,b\in\mathfrak{U}$ y $x\in\mathfrak{X}$ entonces dado $x^*\in\mathfrak{X}^*$ resulta

$$\langle x^*,i(axb)\rangle=\langle axb,x^*\rangle=\langle x,bx^*a\rangle=\langle bx^*a,i(x)\rangle=\langle x^*,ai(x)\,b\rangle$$

Veamos que $\delta^n(i^*S)=T$, de donde se seguirá la tesis. En efecto,

$$\begin{aligned}\delta^n\ (i^*\,S)(a_1,...,a_n)&=a_1\,(i^*\,S)(a_2,...,a_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\,(i^*\,S)(a_1,...,a_ia_{i+1},...,a_n)\\&\quad+(-1)^n\,(i^*\,S)(a_1,...,a_{n-1})\,a_n\\&=i^*\left\{a_1\,S\ (a_2,...,a_n)+...+(-1)^n\ S\ (a_1,...,a_{n-1})\,a_n\right\}\\&=i^*\delta^nS\ (a_1,...,a_n)\\&=(i^*T)\ (a_1,...,a_n),\end{aligned}$$

i.e. $\delta^n\ (i^*S)=i^*\,(\delta^nS)=i^*T=T.$ $\square$

**Proposición 4.2.31.** *Sea $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach con aproximaciones acotadas de la identidad a ambos lados, y sea $\mathfrak{X}$ un $\mathfrak{U}$-módulo de Banach sobre el que la acción de $\mathfrak{U}$ a algún lado es trivial. Entonces $\mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*)=\{0\}$ si $n\in\mathbb{N}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathfrak{U}$ actúa trivialmente a derecha sobre $\mathfrak{X}$, i.e. $xa=0,$ si $x\in\mathfrak{X}$ y $a\in\mathfrak{U}$. Entonces si $\psi\in\mathcal{B}^0(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*)=\mathfrak{X}^*$ y si $a\in\mathfrak{U},x\in\mathfrak{X}$ resulta

$$\delta^1\psi(a)\,x=\psi(xa)-\psi(ax)=-(\psi a)(x),$$

i.e. $\delta^1\psi(a)=-\psi\cdot a$. Asimismo, si $T\in\mathcal{B}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*)$ y $a,b\in\mathfrak{U},x\in\mathfrak{X}$ es

$$\delta^2T(a,b)\,x=T(b)\,(xa)-T(ab)\,x+T(a)\,(bx)=[-T(ab)+T(a)(b)]\,x,$$

o sea $\delta^2 T(a,b) = -T(ab) + T(a)(b)$. Veamos que $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*) = \{0\}$, o lo que es equivalente, que $\ker(\delta^2) \subseteq \operatorname{Im}(\delta^1)$. Dado entonces $T \in \ker(\delta^2)$ sabemos que $T(ab) = T(a)\,b$ para cualquier $a,b \in \mathfrak{U}$. Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una aproximación acotada de la unidad a izquierda en $\mathfrak{U}$. Bastará ver que existe $y \in \mathfrak{X}^*$ tal que $\delta^1 y = T$. Como $T \in \mathcal{B}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*)$ entonces $\{Te_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es conjunto acotado en $\mathfrak{X}^*$. Por el teorema de Banach-Alaoglu $\{Te_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es $\sigma(\mathfrak{X}^*,\mathfrak{X})-$relativamente compacto, de modo que considerando eventualmente una subred existe $y \in \mathfrak{X}^*$ tal que $y = w^* - \text{lím}_{\alpha\in A} Te_\alpha$ (cf. [24], Cap. 5, Teorema 2, p. 159). Dados $x \in \mathfrak{X}, a \in \mathfrak{U}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
(Ta)\,x = \langle x, Ta\rangle &= \left\langle x, T\left(\lim_\alpha (e_\alpha a)\right)\right\rangle \\
&= \left\langle x, \lim_\alpha T(e_\alpha a)\right\rangle = \lim_\alpha \langle x, T(e_\alpha a)\rangle \\
&= \lim_\alpha \langle x, T(e_\alpha)\,a\rangle = \lim_\alpha \langle ax, T(e_\alpha)\rangle \\
&= \langle ax, y\rangle = \langle x, ya\rangle \\
&= \left\langle x, \delta^1(-y)(a)\right\rangle = \delta^1(-y)(a)\,x
\end{aligned}$$

o sea $T = \delta^1(-y)$. Supongamos $n > 1$. Por las Prop. 4.2.20 y 4.2.26 tenemos

$$\left(\widehat{\otimes}_1^n \mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}\right)^* \approx \mathcal{B}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*) \text{ y } \mathcal{H}^{n+p}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) \approx \mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathcal{B}^p(\mathfrak{U},\mathfrak{X}))$$

Luego tenemos que

$$\mathcal{H}^{n+p}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*) \approx \mathcal{H}^n\left(\mathfrak{U}, \left(\widehat{\otimes}_1^p \mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}\right)^*\right),$$

o bien

$$\mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}^*) \approx \mathcal{H}^1\left(\mathfrak{U}, \left(\widehat{\otimes}_1^{n-1} \mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}\right)^*\right).$$

Por (**??**) la acción de $\mathfrak{U}$ a derecha sobre $\widehat{\otimes}_1^p \mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{X}$ es trivial para cada $p \in \mathbb{N}$ y la conclusión sigue como consecuencia del caso anterior. □

**Observación 4.2.32.** Sean $\mathfrak{X}$ un $\mathfrak{U}$-módulo de Banach, $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach unitaria que actúa trivialmente a derecha sobre $\mathfrak{X}$. Entonces $\mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) = \{0\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Precisamente, por Ob. 4.2.23 tenemos que

$$0 \ \underset{\rightarrow}{\delta^0}\ \mathfrak{X} \ \underset{\rightarrow}{\delta^1}\ \mathcal{B}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) \ \underset{\rightarrow}{\delta^2}\ \mathcal{B}^2(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) \ \underset{\rightarrow}{\delta^3}\ \ldots,$$

$\delta^{n+1}\delta^n = 0$ cualquiera sea $n$ y $\mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) = \ker(\delta^{n+1}) / \operatorname{Im}(\delta^n)$. En particular, si $x \in \mathfrak{X}$ y $a \in \mathfrak{U}$ tenemos que $\delta^1(x)\,a = ax - xa$. Además, si $a_1, a_2 \in \mathfrak{U}$, $\psi \in \mathcal{B}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{X})$

$$\delta^2\psi(a_1,a_2) = a_1\psi(a_2) - \psi(a_1a_2) + \psi(a_1)\,a_2.$$

Entonces sabemos que $\mathcal{H}^0(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) = \ker(\delta^1)$. Sean $\psi \in \ker(\delta^2)$ y $e$ la correspondiente unidad de $\mathfrak{U}$ . Como $\psi$ es una derivación, $\psi(e) = \psi(e\cdot e) = e\cdot\psi(e) + \psi(e)\cdot e = \psi(e)$. En general, si $a,b \in \mathfrak{U}$

$$\psi(ab) = a\cdot\psi(b) + \psi(a)\cdot b = a\cdot\psi(b)$$

Luego $\psi(a) = a \cdot \psi(e)$ si $a \in \mathfrak{U}$. Pero entonces si $a \in \mathfrak{U}$ tenemos que

$$\psi(a) = a \cdot \psi(e) - \psi(e) \cdot a,$$

o bien $\psi(a) = \delta^1(\psi(e))\, a$, i.e. $\psi = \delta^1(\psi(e))$. Así $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}) = \{0\}$. Ahora si $n > 1$ y notando que $\mathfrak{U}$ actúa trivialmente a la derecha sobre $\mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$, por la Prop. 4.2.26, (ii), concluimos que $\mathcal{H}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}) = \{0\}$.

# Caracterización de álgebras amenables

**Teorema 4.2.33.** *(B. Johnson). Sea $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach. Son equivalentes:*

**(i)** $\mathfrak{U}$ es amenable.

**(ii)** $\mathfrak{U}$ posee una diagonal virtual.

**(iii)** $\mathfrak{U}$ posee una diagonal aproximada.

*Demostración.* $((i) \Leftrightarrow (ii))$ Supongamos primero que $\mathfrak{U}$ es amenable y veamos que tiene entonces una diagonal virtual. Ya sabemos que podemos asumir, sin perder generalidad, que $\mathfrak{U}$ es unitaria. Si $v = e_{\mathfrak{U}} \otimes e_{\mathfrak{U}}$ en $\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\pi^{**}(a \cdot v - v \cdot a) &= \pi^{**}(a \cdot (e_{\mathfrak{U}} \otimes e_{\mathfrak{U}}) - (e_{\mathfrak{U}} \otimes e_{\mathfrak{U}}) \cdot a)\\ &= \pi^{**}((a \cdot e_{\mathfrak{U}}) \otimes e_{\mathfrak{U}} - e_{\mathfrak{U}} \otimes (e_{\mathfrak{U}} \cdot a))\\ &= \pi^{**}(a \otimes e_{\mathfrak{U}} - e_{\mathfrak{U}} \otimes a)\end{aligned}$$

en $\mathfrak{U}^{**}$. Si $s = a \otimes e_{\mathfrak{U}} - e_{\mathfrak{U}} \otimes a$ en $(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U})^{**}$ y $x^* \in \mathfrak{U}^*$ obtenemos

$$\begin{aligned}\pi^{**}(s)(x^*) &= (s \circ \pi^*)(x^*)\\ &= s(x^* \circ \pi)\\ &= (x^* \circ \pi)(s)\\ &= x^*(\pi(a \otimes e_{\mathfrak{A}} - e_{\mathfrak{A}} \otimes a))\\ &= x^*(a.e_{\mathfrak{A}} - e_{\mathfrak{A}}.a)\\ &= x^*(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Así $\mathrm{ad}_v : \mathfrak{U} \to \ker(\pi^{**})$ pues $\mathrm{ad}_v(a) = a.v - v.a \in \ker(\pi^{**})$, i.e. $\mathrm{ad}_v \in Z^1(\mathfrak{U}, \ker(\pi^{**}))$. Consideremos ahora, el espacio de Banach $\mathbb{X} = (\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U})^* \,/\, \overline{\pi^*(\mathfrak{U}^*)}$ y la proyección canónica $n : (\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U})^* \to \mathbb{X}$. Veamos que $\mathbb{X}^* \approx \ker(\pi^{**})$, donde $\approx$ indica un isomorfismo de $\mathfrak{U}-$bimódulos de Banach. Esto nos permitirá luego usar la amenabilidad de

$\mathfrak{U}$. Para ello, si $\theta \in \ker(\pi^{**})$ y $s \in \left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^*$, sea $\Psi(\theta)(n(s)) = \theta(s)$. Si $n(s) = n(s')$ existe una sucesión $\{a_n^*\}_{n\geq 1}$en $\mathfrak{U}^*$ tal que $s - s' = \lim_n \pi^*(a_n^*)$. Luego,

$$\theta(s) - \theta(s') = \theta(s - s') = \lim_{n\to\infty} \theta(\pi^*(a_n^*)) = \lim_{n\to\infty} \pi^{**}(\theta)(a_n^*) = 0$$

pues $\theta \in \ker(\pi^{**})$. Por lo tanto, $\theta(s) = \theta(s')$ y así $\Psi(\theta)$ está bien definida. Además $\Psi(\theta) : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$, es $\mathbb{C}-$lineal y

$$|\Psi(\theta)(n(s))| = |\theta(s)| \leq \|\theta\| \|s\|,$$

i.e. $|\Psi(\theta)(\xi)| \leq \|\theta\| \|\xi\|$ cualquiera sea $\xi \in \mathbb{X}$. Así, $\Psi(\theta) \in \mathbb{X}^*$ y $\|\Psi(\theta)\| \leq \|\theta\|$. Luego $\Psi \in \mathcal{B}(\ker(\pi^{**}), \mathbb{X}^*)$ .Por otra parte, si $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$ y $\theta \in \ker(\pi^{**})$, como $\ker(\pi^{**})$ es un $\mathfrak{U}-$bimódulo y $n$ es un homomorfismo de $\mathfrak{U}-$bimódulos, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\Psi(a_1 \cdot \theta \cdot a_2)(n(s)) &= (a_1 \cdot \theta \cdot a_2)(s) \\
&= \langle s, a_1 \cdot \theta \cdot a_2 \rangle \\
&= \langle a_2 \cdot s \cdot a_1, \theta \rangle \\
&= \Psi(\theta)(n(a_2 \cdot s \cdot a_1)) \\
&= \Psi(\theta)(a_2 \cdot n(s) \cdot a_1) = (a_1 \cdot \Psi(\theta) \cdot a_2)(n(s)).
\end{aligned}$$

Ahora, si $\Psi(\theta) = 0$ entonces $\theta(s) = 0$ cualquiera sea $s \in \left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^*$, o sea $\theta = 0$. Además, si $\lambda \in \mathbb{X}^*$ entonces $n^*(\lambda) \in (\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U})^{**}$ y

$$\langle a^*, \pi^{**}(n^*(\lambda)) \rangle = \langle \pi^*(a^*), n^*(\lambda) \rangle = \langle n(\pi^*(a^*)), \lambda \rangle = 0$$

para cualquier $a^* \in \mathfrak{U}^*$, i.e. $n^*(\lambda) \in \ker(\pi^{**})$ y

$$\Psi(n^*(\lambda))(n(s)) = n^*(\lambda)(s) = \lambda(n(s))$$

para cualquier $s$, con lo cual $\Psi(n^*(\lambda)) = \lambda$. Por el Teorema de la Función Abierta deducimos que $\Psi$ es un homeomorfismo de $\mathfrak{U}$-bimódulos de Banach. Ahora si $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ son $\mathfrak{U}$-bimódulos de Banach isomorfos entonces $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}) \approx \mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$ (V. Prop. 4.2.34). En consecuencia, $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \ker(\pi^{**})) \approx \mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{X})$ y como $\mathfrak{U}$ es amenable, resulta $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U}, \ker(\pi^{**})) = \{0\}$, i.e. $\mathrm{ad}_v$ es una derivación interna. Existe entonces un elemento $w \in \ker(\pi^{**})$ tal que $\mathrm{ad}_{\mathbf{v}} = \mathrm{ad}_w$. Luego $a \cdot (v - w) - (v - w) \cdot a = 0$ para cualquier $a \in \mathfrak{U}$. Si $M = v - w$ en $(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U})^{**}$ entonces

$$\pi^{**}(M) = \pi^{**}(v - w) = \pi^{**}(v) = e_{\mathfrak{U}}$$

y además $a \cdot M = M \cdot a$ si $a \in \mathfrak{U}$.

Recíprocamente, supongamos que $M$ es diagonal virtual de $\mathfrak{U}$. Sea $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}-$bimódulo de Banach y veamos que $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}^*)=\{0\}$. Para ello, sea dada $D\in\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}^*)$ y veamos que $D$ es derivación interna. Si $x\in\mathbb{E}$, por la $\mathbb{C}$-bilinealidad de la aplicación $(a,b)\to\langle x,aDb\rangle$ sobre $\mathfrak{U}\times\mathfrak{U}$ y por la propiedad universal que caracteriza al producto tensorial sea $\Lambda_x\in(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U})^*$ única tal que $\langle a\otimes b,\Lambda_x\rangle=\langle x,aDb\rangle$ para todo $a,b\in\mathfrak{U}$. Si $u=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\otimes b_j$ en $\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}$ tenemos

$$\begin{aligned}|\langle u,\Lambda_x\rangle|&\leq\sum_{j=1}^{n}|\langle x,a_jDb_j\rangle|\leq\|x\|\sum_{j=1}^{n}\|a_jDb_j\|\\&\leq\|x\|\sum_{j=1}^{n}\|a_j\|\,\|Db_j\|\leq\|D\|\,\|x\|\sum_{j=1}^{n}\|a_j\|\,\|b_j\|\,,\end{aligned}$$

de donde $|\langle u,\Lambda_x\rangle|\leq\|u\|_\omega\|D\|\,\|x\|$, i.e. $\Lambda_x\in\mathbb{E}^*$ y $\|\Lambda_x\|\leq\|D\|\,\|x\|$ para cada $x\in\mathbb{E}$. Queda inducida entonces una aplicación lineal $\lambda:\mathbb{E}\to\mathbb{C}$ tal que $\langle x,\lambda\rangle=\langle\Lambda_x,M\rangle$ si $x\in\mathbb{E}$. Más aún, $|\langle\Lambda_x,M\rangle|\leq\|\Lambda_x\|\,\|M\|\leq\|D\|\,\|x\|\,\|M\|$ y por consiguiente $\lambda\in\mathbb{E}^*$ y $\|\lambda\|\leq\|D\|\,\|M\|$. Sean ahora $a,b,c\in\mathfrak{U}$, $x\in\mathbb{E}$. Entonces

$$\langle b\otimes c,\Lambda_{ax-xa}\rangle=\langle ax-xa,bDc\rangle=\langle x,bD(c)a-abD(c)\rangle\,, \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}\langle b\otimes c,a\Lambda_x-\Lambda_xa\rangle&=\langle b\otimes(ca)-(ab)\otimes c,\Lambda_x\rangle\\&=\langle x,bD\,(ca)-abD\,(c)\rangle\\&=\langle x,bD(c)a+bcD(a)-abD(c)\rangle\end{aligned} \tag{4.35}$$

De (4.34) y (4.35) resulta

$$\langle b\otimes c,\Lambda_{ax-xa}\rangle+\langle x,bcD\,(a)\rangle=\langle b\otimes c,a\Lambda_x-\Lambda_xa\rangle\,. \tag{4.36}$$

Por (4.36), dado si $v\in\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}$ podemos escribir

$$\langle v,\Lambda_{ax-xa}\rangle=\langle v,a\Lambda_x-\Lambda_xa\rangle-\langle x,\pi\,(v)\,D\,(a)\rangle\,. \tag{4.37}$$

Sea $\{\nu_l\}_{l\in L}$ una red acotada en $\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}$ tal que $M=w^*\text{-lím}_{l\in L}\,\nu_l$ (cf. [5], Prop. 4.1, p. 131). Dado $\varepsilon>0$ el conjunto

$$\mathfrak{W}=\left\{N\in\left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{**}:\text{máx}\left\{|\langle\Lambda_{ax-xa},N-M\rangle|\,,|\langle a\Lambda_x-\Lambda_xa,N-M\rangle|\right\}\leq\varepsilon/2\right\}$$

es un $w^*-$ entorno de $M$ en $\left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{**}$. Luego existe $l_0\in L$ tal que $\nu_l\in\mathfrak{W}$ si $l\geq l_0$ en $L$. Notemos que $e_{\mathfrak{U}}=w\text{-lím}_{l\in L:l\geq l_0}\,\pi\,(\nu_l)$ en $\mathfrak{U}^{**}$. Precisamente, puesto que $\pi^{**}\mid_{\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}}=\pi$, si $a^*\in\mathfrak{U}^*$ podemos escribir

$$\langle a^*,\pi^{**}\,(v_l)\rangle=\langle a^*,\pi\,(v_l)\rangle=\langle\pi^*\,(a^*)\,,v_l\rangle\,.$$

Luego

$$\lim_{l\in L:l\geq l_0}\langle a^*,\pi^{**}(v_l)\rangle=\langle a^*,e_{\mathfrak{U}}\rangle=\langle\pi^*(a^*),M\rangle=\langle a^*,\pi^{**}(M)\rangle$$

y sigue la afirmación. En consecuencia, $e_{\mathfrak{U}}\in\overline{\mathrm{Co}\{\pi(v_l)\}_{l\geq l_0}}^{w}$. Pero entonces hay una sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1}$ en $\mathrm{Co}\{\pi(v_l)\}_{l\geq l_0}$ tal que $\|b_n-e_{\mathfrak{U}}\|\to 0$ (cf. [22], Th.1.3.4, p. 30). Podemos escribir $b_n=\pi(\nu^n)$, con

$$\nu^n=\sum_{k=1}^{k(n)}t_k^n\,v_{l_k^n}\text{ en }\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U},\,0\leq t_k^n\leq 1,\ \sum_{k=1}^{k(n)}t_k^n=1,\ n\geq 1.$$

Puesto que $\cup_{n\geq 1}\left\{v_{l_k^n}\right\}_{1\leq k\leq k(n)}\subseteq\mathfrak{W}$ y además por (4.37) para cada $n\in\mathbb{N}$ es

$$\langle v^n,\Lambda_{ax-xa}\rangle=\langle v^n,a\Lambda_x-\Lambda_x a\rangle-\langle x,b_nD(a)\rangle$$

podemos hacer

$$\langle\Lambda_{ax-xa}-(a\Lambda_x-\Lambda_x a),v^n\rangle=-\langle x,b_nD(a)\rangle$$

$$\langle\Lambda_{ax-xa}-(a\Lambda_x-\Lambda_x a),v^n-M\rangle+\langle\Lambda_{ax-xa}-(a\Lambda_x-\Lambda_x a),M\rangle=-\langle x,b_nD(a)\rangle$$

Haciendo $n\to\infty$ tenemos que $|\langle\Lambda_{ax-xa}-(a\Lambda_x-\Lambda_x a),v^n-M\rangle|\leq\epsilon$. Entonces,

$$|\langle\Lambda_{ax-xa}-(a\Lambda_x-\Lambda_x a),M\rangle+\langle x,D(a)\rangle|\leq\epsilon$$

Como $\varepsilon$ puede ser arbitrariamente pequeño deducimos que

$$\begin{aligned}\langle\Lambda_{ax-xa},M\rangle&=\langle a\Lambda_x-\Lambda_x a,M\rangle-\langle x,D(a)\rangle\\&=\langle\Lambda_x,Ma-aM\rangle-\langle x,D(a)\rangle\\&=-\langle x,D(a)\rangle\,.\end{aligned}$$

En definitiva,

$$\langle x,\lambda a-a\lambda\rangle=\langle ax-xa,\lambda\rangle=\langle\Lambda_{ax-xa},M\rangle=-\langle x,D(a)\rangle\,,$$

i.e. $D(a)=a\lambda-\lambda a$ y $D$ se realiza como derivación interna. Siendo $D$ arbitraria, $\mathfrak{U}$ deviene amenable.

$((ii)\Rightarrow(iii))$ Sea $M\in\left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{**}$ tal que $a\cdot\pi^{**}(M)=a$ y $a\cdot M=M\cdot a$ si $a\in\mathfrak{U}$. Sea $\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una red acotada en $\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}$ tal que $M=w^*-\lim_{\alpha\in A}m_\alpha$. Puesto que

$$\overline{\mathrm{Co}\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}}^{w^*}=\overline{\mathrm{Co}\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}}$$

entonces existe una red $\{n_\beta\}_{\beta\in B}\subseteq\overline{\mathrm{Co}\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}}$ tal que $\lim_{\beta\in B}n_\beta=M$ en $\left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{**}$ (cf. [5], Corollary 1.5, p.126). Notemos que $\{n_\beta\}_{\beta\in B}$ es acotado y si $\beta\in B$ y $a\in\mathfrak{U}$ es

$$\|a\cdot n_\beta-n_\beta\cdot a\|=\|a(n_\beta-M)-(n_\beta-M)a\|\leq 2\|a\|\,\|n_\beta-M\|\,,$$

de modo que $a\cdot n_\beta-n_\beta\cdot a\to 0$. Asimismo, $a\cdot\pi^{**}(n_\beta)\to a\cdot\pi^{**}(M)=a$.

$((iii) \Rightarrow (ii))$ Sea $\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una diagonal aproximada de $\mathfrak{U}$ y veamos que $\mathfrak{U}$ tiene una diagonal virtual. Como $\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es acotado en $\left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{**}$, pasando eventualmente a una subred podemos asumir que existe $M \in \left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{**}$ tal que $M = w^*\text{−}\mathrm{lím}_{\alpha\in A}\, m_\alpha$ (cf. [24], Cap. 5, Teorema 2, p. 159). Sean $a \in \mathfrak{U}$, $\phi \in \left(\mathfrak{U}\widehat{\otimes}\mathfrak{U}\right)^{*}$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \phi, a\cdot M - M\cdot a\rangle &= \langle \phi\cdot a - a\cdot\phi, M\rangle \\ &= \lim_{\alpha}\langle \phi\cdot a - a\cdot\phi, m_\alpha\rangle = \lim_{\alpha}\langle \phi, a\cdot m_\alpha - m_\alpha\cdot a\rangle = 0\end{aligned}$$

i.e. $a\cdot M = M\cdot a$. Además, si $x^* \in \mathfrak{U}^*$ resulta

$$\begin{aligned}\langle x^*, \pi^{**}(M)\cdot a\rangle &= \langle a\cdot x^*, \pi^{**}(M)\rangle \\ &= \langle \pi^*(a\cdot x^*), M\rangle \\ &= \langle (a\cdot x^*)\circ\pi, M\rangle \\ &= \lim_{\alpha}\langle (a\cdot x^*)\circ\pi, m_\alpha\rangle \\ &= \lim_{\alpha}\langle \pi(m_\alpha), a\cdot x^*\rangle \\ &= \lim_{\alpha}\langle \pi(m_\alpha)\cdot a, x^*\rangle = \langle a, x^*\rangle = \langle x^*, a\rangle\end{aligned}$$

i.e. $\pi^{**}(M)\cdot a = a$ para cualquier $a \in \mathfrak{U}$.

□

**Proposición 4.2.34.** *Si* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *son* $\mathfrak{U}$*-bimódulos de Banach isomorfos entonces*

$$\mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}) \approx \mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F}).$$

*Demostración.* Sea $T^0 : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ isomorfismo de $\mathfrak{U}-$bimódulos, y sean

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{E} & \overset{\delta^0_{\mathbb{E}}}{\to} & \mathcal{L}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}) & \overset{\delta^1_{\mathbb{E}}}{\to} & \mathcal{L}^2(\mathfrak{U},\mathbb{E}) \\ \downarrow T^0 & & \downarrow T^1 & & \downarrow T^2 \\ \mathbb{F} & \overset{\delta^0_{\mathbb{F}}}{\to} & \mathcal{L}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F}) & \overset{\delta^1_{\mathbb{F}}}{\to} & \mathcal{L}^2(\mathfrak{U},\mathbb{F})\end{array}$$

Así tenemos que $\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}) = \ker(\delta^1_{\mathbb{E}})$ y también que $\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F}) = \ker(\delta^1_{\mathbb{F}})$. Además $T^1(\alpha)(a) = T^0(\alpha(a))$, con $a \in A, \alpha \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E})$. Veamos que $T^1(\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E})) = \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})$. En efecto, si $\alpha \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E})$ y $a, b \in \mathfrak{U}$ entonces

$$\begin{aligned}(T^1\alpha)(a\cdot b) &= T^0(\alpha(a\cdot b)) = T^0(\alpha(a)\cdot b + a\cdot\alpha(b)) \\ &= T^0(\alpha(a))b + aT^0(\alpha(b)) = T^1(\alpha)(a)\, b + aT^1(\alpha)(b)\end{aligned}$$

entonces $T^1(\alpha) \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})$. Por otro lado, si $\delta \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})$ resulta $(T^0)^{-1}\delta \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E})$ pues

$$\begin{aligned}(T^0)^{-1}\delta(a\cdot b) &= (T^0)^{-1}(a\cdot\delta(b) + \delta(a)\cdot b) \\ &= a\cdot(T^0)^{-1}\delta(b) + (T^0)^{-1}\delta(a)\cdot b.\end{aligned}$$

Además, $T^1((T^0)^{-1}\delta) = T^0((T^0)^{-1}\delta) = \delta$. Asimismo, se verifican las identidades

$$\mathcal{N}^1(\mathfrak{U};\mathbb{E}) = \delta^0_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}) \text{ y } \mathcal{N}^1(\mathfrak{U};\mathbb{F}) = \delta^0_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}).$$

En consecuencia $T^1(\mathcal{N}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E})) = \mathcal{N}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})$. Precisamente si $x \in \mathbb{E}$ y $a \in \mathfrak{U}$ entonces

$$\begin{aligned} T^1(\delta^0_{\mathbb{E}}(x))(a) &= T^0(\delta^0_{\mathbb{E}}(x)a) \\ &= T^0(a \cdot x - x \cdot a) \\ &= a \cdot T^0(x) - T^0(x) \cdot a = \delta^0_{\mathbb{F}}(T^0(x))a, \end{aligned}$$

i.e. $T^1(\delta^0_{\mathbb{E}}(x)) = \delta^0_{\mathbb{F}}(T^0(x))$ para cualquier $x \in \mathbb{E}$. Además, como $T^0$ es suryectiva, si $y \in \mathbb{F}$ e $y = T^0(x)$ entonces $\delta^0_{\mathbb{F}}(y) = T^1(\delta_{\mathbb{E}}(T^0)^{-1}(y))$. En definitiva,

$$\mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F}) = \frac{\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})}{\mathcal{N}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})} = \frac{T^1(\mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}))}{T^1(\mathcal{N}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}))}$$

Sea $p : \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F}) \to \mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})$ la proyección al cociente y sea $\tau : \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}) \to \mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})$ la aplicación $\tau = p \circ T^1$. $\tau$ es una aplicación lineal suryectiva. Sea $l \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E})$ tal que $\tau(l) = 0$. Luego $T^1(l) \in T^1(\mathcal{N}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}))$ y como $T^1$ es inyectiva, $l \in \mathcal{N}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E})$. Luego $\mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{E}) \approx \mathcal{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{F})$. □

A continuación veremos que toda álgebra amenable $\mathfrak{U}$ tiene **aproximación acotada de la identidad**, i.e. posee una red $\{e_j\}_{j\in J}$ acotada tal que $\lim_{j\in J} a\cdot e_j = \lim_{j\in J} e_j \cdot a = a$ en $\mathfrak{U}$ para cada $a \in \mathfrak{U}$.

**Corolario 4.2.35.** *Sea $\mathfrak{U}$ álgebra de Banach amenable. Entonces $\mathfrak{U}$ tiene una aproximación acotada de la identidad.*

*Demostración.* Sea $\mathbb{A}$ un $\mathfrak{U}-$bimódulo de Banach cuyo espacio subyacente es $\mathfrak{U}$, de modo que $a \cdot x = a \cdot_{\mathfrak{U}} x$ y $x \cdot a = 0$, si $a \in \mathfrak{U}$, $x \in \mathbb{A}$. Sea $D : \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbb{A}^{**}$ la inmersión natural y sean $a, b \in \mathfrak{U}$, $x^* \in \mathbb{A}^*$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle x^*, D(a) \cdot b + a \cdot D(b)\rangle &= \langle b \cdot x^*, D(a)\rangle + \langle x^* \cdot a, D(b)\rangle \\ &= \langle b, x^* \cdot a\rangle \\ &= \langle a \cdot b, x^*\rangle = \langle x^*, D(a \cdot b)\rangle, \end{aligned}$$

i.e. $D \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U},\mathbb{A}^{**})$. Sea $E \in \mathbb{A}^{**}$ tal que $D = \mathrm{ad}_E$. Luego

$$a = D(a) = \mathrm{ad}_E(a) = a \cdot E - E \cdot a = a \cdot E$$

para cualquier $a \in \mathfrak{U}$. Sea $\{e_s\}_{s\in\sigma} \subseteq \mathfrak{U}$ acotado tal que $E = w^* - \lim_{s\in\sigma} e_s$. En particular, $E \in \overline{\mathrm{Co}\{e_s\}_{s\in\sigma}}$ y hay una sucesión $\{\sigma_n\} \subseteq \mathrm{Co}\{e_s\}_{s\in\sigma}$ tal que $\|E - \sigma_n\| \to 0$ en $\mathbb{A}^{**}$. Dado $a \in \mathfrak{U}$ resulta

$$\|a \cdot E - a \cdot \sigma_n\| \leq \|a\| \, \|E - \sigma_n\|$$

i.e. $\|a - a \cdot \sigma_n\| \to 0$, de modo que $a \cdot \sigma_n \to a$ y $\{\sigma_n\}$ es aproximación acotada de la identidad en $\mathfrak{U}$ a la derecha. Análogamente, hay una aproximación acotada de la unidad $\{u_n\}$ de $\mathfrak{U}$ a la izquierda. Sea $\tau_{n,m} = u_n + \sigma_m - \sigma_m u_n$. Dados $a \in \mathfrak{U}$, $n, m \in \mathbb{N}$ resulta

$$\|\tau_{n,m} \cdot a - a\| = \|a - u_n \cdot a - \sigma_m \cdot a + \sigma_m \cdot u_n \cdot a\| \leq \|a - u_n \cdot a\| + \|\sigma_m\| \|u_n \cdot a - a\|,$$

de modo que $\lim_{n,m\to\infty} \|\tau_{n,m} \cdot a - a\| = 0$. Análogamente, $\lim_{n,m\to\infty} \|a \cdot \tau_{n,m} - a\| = 0$. $\square$

# Caracterización de grupos amenables

Ya hemos señalado que la noción de grupo amenable quedó fuertemente motivada por trabajos iniciales de S. Banach y A. Tarski en base a un problema de Hausdorff (cf. [14]). En particular, a partir del artículo [35] de A. Tarski se deduce lo siguiente: si $G$ es un grupo dado, existirá una medida no negativa $\mu$ globalmente definida en partes de $G$ tal que $\mu(a \cdot E) = \mu(E)$ si $a \in G$ y $E \subseteq G$ si y solo si $G$ posee un **promedio invariante por traslaciones**. En general, las medidas sobre $G$ están definidas en $\sigma-$álgebras estrictamente menores que la de todas las partes de $G$. P. ej., si $G = (\mathbb{R}, +)$ se sabe que para la medida de Lebesgue hay cantidad de subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}$, siendo la misma invariante por traslaciones. Veremos que sobre el espacio $l^\infty(G)$ de aplicaciones acotadas de $G$ en $\mathbb{C}$ podemos definir un producto, al que indicaremos $*$, de modo que $(l^\infty(G), *)$ es un álgebra de Banach. Entonces, por promedio invariante sobre $G$ entenderemos un funcional $m \in l^\infty(G)^*$ tal que

$$\langle 1, m \rangle = \|m\| = 1 \tag{4.38}$$

y

$$\langle \delta_a * \phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle \tag{4.39}$$

si $a \in G$ y $\phi \in l^\infty(G)$.

La existencia de un promedio invariante sobre un grupo $G$ depende intrínsecamente de la estructura teórica de $G$. Diremos que un grupo es amenable cuando posea un tal promedio, siendo no amenable en caso contrario. P. ej., los grupos $\mathbb{F}_2$ de dos generadores, los grupos ortogonal $O(3)$, especial ortogonal $SO(3)$ o $Gl(3)$ de matrices inversibles sobre $\mathbb{R}^{3\times3}$ o $\mathbb{C}^{3\times3}$ no son amenables. La teoría de amenabilidad concebida por B. Johnson precisa condiciones de amenabilidad sobre una amplia categoría de grupos: la de los grupos localmente compactos. Se establece que para que un grupo localmente compacto $G$ sea amenable es necesario y suficiente que la correspondiente álgebra de Banach $\mathfrak{U} = L^1_{m_G}(G)$ lo sea. En particular, la local compacidad de $G$, que asumimos siempre separado, permite la construcción de la medida de Haar $m_G$ sobre $G$ (cf. [13], [16]). La misma es no nula, no negativa, boreliana, regular sobre $G$, única salvo constantes positivas de modo que $m_G(a \cdot E) = m_G(E)$ para cada subconjunto de Borel de $G$, o bien única tal que $m_G$ es invariante a izquierda. En consecuencia, en el contexto de grupos localmente compactos es posible generalizar la noción de promedio invariante, entendiendo por tal un funcional $m \in \left(L^{\infty}_{m_G}(G)\right)^*$ de modo que se verifican (4.38) y (4.39). Respecto a la condición (4.39), mediante $\delta_a$ indicamos a la medida de Borel sobre $G$ concentrada en $a \in G$. Luego, si $\phi \in L^{\infty}_{m_G}(G)$ indicamos, formalmente, $\delta_a * \phi$ a la función sobre $G$:

$$(\delta_a * \phi)(c) \triangleq \int_G \phi\left(b^{-1}c\right) d\delta_a(b).$$

Razonando como en la Obs. 4.2.46 puede verse que $\delta_a * \phi \in L^{\infty}_{m_G}(G)$.

Así, si $G$ es un grupo amenable se ha de probar que toda derivación con coeficientes en un $\mathfrak{U}$-bimódulo $\mathbb{E}$ es interna. La prueba de que esta condición es necesaria se basará en los siguientes pilares: (I) Basta hacer una reducción, sin pérdida de generalidad, a cierta clase restringida de $L^1_{m_G}(G)$-bimódulos. (I) Si $\mathcal{M}(G)$ es el álgebra de Banach de medidas de Borel complejas acotadas sobre $G$ entonces $L^1_{m_G}(G) \hookrightarrow \mathcal{M}(G)$ y toda derivación sobre $L^1_{m_G}(G)$ es extendible a una derivación sobre $\mathcal{M}(G)$. (I) Generar las condiciones para aplicar el teorema de punto fijo de M. M. Day (cf. [7]). Que la condición es suficiente sigue de una manera un tanto más directa, una vez que se comprende la estructura de funcionales lineales acotados sobre $L^{\infty}(G)$ en (I).

## El proceso de reducción

Formalmente, si $f, g \in L^1_{m_G}(G)$ sea $(f * g)(a) = \int_G f(b)\, g(b^{-1}a)\, dm_G(b)$. La función $a \to (f * g)(a)$ deviene medible sobre $G$ y es absolutamente integrable respecto a la medida de Haar, resultando $\left(L^1_{m_G}(G), \|\circ\|\right)$ un álgebra de Banach y $L^1_{m_G}(G)^* \approx L^{\infty}_{m_G}(G)$. Por la local compacidad de $G$ el álgebra $L^1_{m_G}(G)$ posee aproximaciones acotadas de la identidad (cf. [27], p. 321). Por ello, usando la Prop. 4.2.39 y el Lema 4.2.40 podremos reducir la cuestión general a la de $\mathfrak{U}-$**bimódulos neo-unitarios**, i.e. aquellos bimódulos $\mathfrak{U}-$bimódulos de Banach $\mathbb{E}$ en los que todo elemento es representable en la forma $axb$ para ciertos $a, b \in \mathfrak{U}$, $x \in \mathbb{E}$, con lo cual tendremos (i). Cabe señalar el siguiente teorema de factorización de P. J. Cohen:

**Teorema 4.2.36.** *(cf. [4]) Sea $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach con una aproximación acotada de la identidad a izquierda $\{e_s\}$ (resp. a la derecha) y sea $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}-$módulo de Banach a izquierda (resp. a derecha) tal que $\{e_s\}$ es aproximación de la identidad para $\mathbb{E}$ (i.e. $e_s \cdot x \to x$ y $x \cdot e_s \to x$ para todo $x \in \mathbb{E}$ respectivamente). Entonces para cada elemento $x \in \mathbb{E}$ existen $a \in \mathfrak{U}$ e $y \in \mathbb{E}$ tal que $x = a \cdot y$ (resp. $x = y \cdot a$).*

En particular, no es inmediato ni trivial que sean compatibles las estructuras algebraicas de módulos y de módulos neo-unitarios. Es oportuna entonces la siguiente consecuencia del teorema de Cohen:

**Corolario 4.2.37.** *Sea $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach, $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}-$módulo a la izquierda de Banach y sea $\{e_s\}_{s\in\sigma}$ una aproximación acotada de la unidad de $\mathfrak{U}$. Entonces el subconjunto $\mathbb{E}_0$ de elementos de la forma $a \cdot x$ con $a \in \mathfrak{U}$ y $x \in \mathbb{E}$ en un $\mathfrak{U}$-submódulo cerrado de $\mathbb{E}$.*

*Demostración.* Sea $\mathbb{F}$ el conjunto de elementos $x \in \mathbb{E}$ del tipo $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$, con $n \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_n \in \mathfrak{U}$ y $x_1, ..., x_n \in \mathbb{E}$. Entonces $\mathbb{F}$ es un $\mathfrak{U}-$submódulo de $\mathbb{E}$ a la izquierda. Más aún, $\overline{\mathbb{F}}$ es un $\mathfrak{U}$-submódulo de Banach a la izquierda de $\mathbb{E}$ y $\{e_s\}_{s\in\sigma}$ aproxima la unidad de $\overline{\mathbb{F}}$. Por el teorema de Cohen, si $y \in \overline{\mathbb{F}}$ sean $a \in \mathfrak{U}$, $x \in \overline{\mathbb{F}}$ tales que $y = a.x \in \mathbb{F}$, i.e. $\overline{\mathbb{F}}\subseteq \mathbb{F}$ y $\mathbb{F}$ es cerrado. En particular, hemos visto que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}_0$ y como $\mathbb{E}_0 \subseteq \mathbb{F}$ sigue la afirmación. □

**Observación 4.2.38.** La Prop. 4.2.39 siguiente es válida en un contexto más general que el que nos interesa (cf. [3]). Como se observará, usando la terminología algebraica, a partir de una sucesión exacta corta de complejos es posible definir homomorfismos de conexión y una sucesión exacta larga de complejos. Afortunadamente, es posible adaptar estas construcciones a nuestro marco de trabajo, por lo cual, salvo alguna breve observación al inicio de la prueba y detalles de nomenclatura, la demostración es en todo algebraica.

**Proposición 4.2.39.** *Sean $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach, $\mathfrak{X}$ un $\mathfrak{U}-$módulo de Banach, $\mathfrak{I}$ un $\mathfrak{U}-$submódulo de Banach $\mathfrak{X}$ complementable en cuanto subespacio de Banach en $\mathfrak{X}$, i.e. existe $\mathfrak{K}$ un subespacio de Banach de $\mathfrak{X}$ tal que $\mathfrak{X} = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{K}$. Entonces hay morfismos para las cuales la sucesión*

$$... \overset{\partial^n}{\rightarrow} \mathcal{H}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{I}) \overset{\iota_n^*}{\rightarrow} \mathcal{H}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}) \overset{q_n^*}{\rightarrow} \mathcal{H}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}/\mathfrak{I}) \xrightarrow{\partial^{n+1}} \mathcal{H}^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{I}) \xrightarrow{\iota_{n+1}^*} ...$$

es exacta.

*Demostración.* Sean $\iota : \mathfrak{I} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ la inmersión natural de $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{X}$ y $q : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}/\mathfrak{I}$ la proyección al cociente. Evidentemente se trata, en ambos casos, de homomorfismos acotados de $\mathfrak{U}$-módulos. Puesto que $\mathfrak{I}$ es complementable sean $\mathfrak{K}$ un subespacio de Banach de $\mathfrak{X}$ tal que $\mathfrak{X} = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{K}$ y $P_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ la proyección natural. Si $x \in \mathfrak{X}$ sea $|x| = \|x_1\| + \|x_2\|$, siendo $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathfrak{I}$, $x_2 \in \mathfrak{K}$. Entonces $(\mathfrak{X}, |.|)$ es un espacio de Banach y, por el teorema de la función abierta, las normas $|\circ|$, $\|\circ\|$ son equivalentes. Hay entonces escalares $m_1$, $m_2$ ambos positivos tales que $m_1 \|x\| \leq |x| \leq m_2 \|x\|$ para cualquier $x \in \mathfrak{X}$. Evidentemente $\|x\| \leq |x|$ para cada $x$, de modo que puede elegirse $0 < m_1 \leq 1$. En general, $\|P_{\mathfrak{K}}(x)\| \leq |x| \leq m_2 \|x\|$ de modo que $P_{\mathfrak{K}} \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Escribiremos $p : \mathfrak{X}/\mathfrak{I} \to \mathfrak{X}$ de modo que $p(\alpha) = P_{\mathfrak{K}}(x)$ si $\alpha = q(x)$ en $\mathfrak{X}/\mathfrak{I}$. Es fácil ver entonces que $p$ es un inverso acotado a derecha de $q$, i.e. $q \circ p = \mathrm{Id}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{I}}$ . En particular, $p$ no es necesariamente morfismo de $\mathfrak{U}$-módulos. Si $n$ es un entero no menor que dos quedan naturalmente inducidos sendos morfismos de $\mathfrak{U}$-módulos $\iota_n$'s, $q_n$'s para los que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathcal{B}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I}) & \xrightarrow{\iota_n} & \mathcal{B}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) & \xrightarrow{q_n} & \mathcal{B}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow \delta^n_{\mathfrak{I}} & & \uparrow \delta^n_{\mathfrak{X}} & & \uparrow \delta^n_{\mathfrak{X}/\mathfrak{I}} & & \\
0 & \to & \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{I}) & \xrightarrow{\iota_{n-1}} & \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) & \xrightarrow{q_{n-1}} & \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow \delta^{n-1}_{\mathfrak{I}} & & \uparrow \delta^{n-1}_{\mathfrak{X}} & & \uparrow \delta^{n-1}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{I}} & & \\
0 & \to & \mathcal{B}^{n-2}(\mathfrak{U},\mathfrak{I}) & \xrightarrow{\iota_{n-2}} & \mathcal{B}^{n-2}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) & \xrightarrow{q_{n-2}} & \mathcal{B}^{n-2}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I}) & \to & 0
\end{array}$$

Si $\zeta \in \mathcal{Z}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I})$ sea $\zeta_1 \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})$ tal que $q_{n-1}(\zeta_1) = \zeta$. Así $\delta^n_{\mathfrak{X}}(\zeta_1) \in \ker(q_n)$ y existe $\zeta_2 \in \mathcal{B}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})$ único tal que $\iota_n(\zeta_2) = \delta^n_{\mathfrak{X}}(\zeta_1)$. Como

$$\iota_{n+1}\left(\delta^{n+1}_{\mathfrak{I}}(\zeta_2)\right) = \delta^{n+1}_{\mathfrak{X}}(\iota_n(\zeta_2)) = \delta^{n+1}_{\mathfrak{X}}(\delta^n_{\mathfrak{X}}(\zeta_1)) = 0$$

entonces $\zeta_2 \in \mathcal{Z}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})$ pues $\iota_{n+1}$ es inyectiva y $\delta^{n+1}_{\mathfrak{X}} \circ \delta^n_{\mathfrak{X}} = 0$. Sea

$$\Theta_n : \mathcal{Z}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I}) \to \mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I}),\ \Theta_n(\zeta) = \zeta_2 + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I}).$$

Análogamente, si $\zeta = q_{n-1}(\vartheta_1)$ con $\vartheta_1 \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})$ existirá $\vartheta_2 \in \mathcal{B}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})$ tal que $\iota_n(\vartheta_2) = \delta^n_{\mathfrak{X}}(\vartheta_1)$. Como $q_{n-1}(\zeta_1 - \vartheta_1) = 0$ sea $\eta \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{I})$ tal que $\iota_{n-1}(\eta) = \zeta_1 - \vartheta_1$. Así

$$\iota_n(\zeta_2 - \vartheta_2) = \delta^n_{\mathfrak{X}}(\zeta_1 - \vartheta_1) = \delta^n_{\mathfrak{X}}(\iota_{n-1}(\eta)) = \iota_n(\delta^n_{\mathfrak{I}}(\eta)),$$

i.e. $\zeta_2 - \vartheta_2 = \delta^n_{\mathfrak{I}}(\eta)$ y $\Theta_n$ está bien definida. Por otra parte, sea $\nu \in \mathcal{N}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I})$, digamos $\nu = \delta^{n-1}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{I}}(\nu_1)$ con $\nu_1 \in \mathcal{B}^{n-2}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I})$. Sea $\nu_2 \in \mathcal{B}^{n-2}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})$ tal que $q_{n-2}(\nu_2) = \nu_1$ y sea $\xi = \delta^{n-1}_{\mathfrak{X}}(\nu_2)$. Tenemos $q_{n-1}(\xi) = \nu$ y, si $\xi_1 \in \mathcal{B}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})$ es único tal que $\iota_n(\xi_1) = \delta^n_{\mathfrak{X}}(\xi)$ entonces $\xi_1 = 0$ pues $\delta^n_{\mathfrak{X}} \circ \delta^{n-1}_{\mathfrak{X}} = 0$ e $\iota_n$ es inyectiva. Luego $\Theta_n(\nu) = 0$ en $\mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})$ y queda inducido un homomorfismo

$$\partial^n : \mathcal{H}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I}) \to \mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I}),\ \partial^n\left(\zeta + \mathcal{N}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I})\right) = \iota_n^{-1}\delta^n_{\mathfrak{X}}q_{n-1}^{-1}\zeta + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I}).$$

Los siguientes morfismos son naturales:

$$\begin{aligned}
&\iota_n^* : \mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I}) \to \mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}),\ \iota_n^*(\varsigma + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I})) = \iota_n(\varsigma) + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}),\\
&q_n^* : \mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) \to \mathcal{H}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I}),\ q_n^*(\varphi + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X})) = q_n(\varphi) + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I}).
\end{aligned}$$

Notemos que $\mathrm{Im}(\iota_n^*) \subseteq \ker(q_n^*)$ pues $q_n \circ \iota_n = 0$, de modo que

$$q_n^*(\iota_n^*(\varsigma + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{I}))) = q_n^*(\iota_n(\varsigma) + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X})) = \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I}).$$

Si $\varphi + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) \in \ker(q_n^*)$ existe $\varphi_1 \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}/\mathfrak{I})$ tal que $q_n(\varphi) = \delta^n_{\mathfrak{X}/\mathfrak{I}}(\varphi_1)$. Sea $\varsigma \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})$ tal que $\varphi_1 = q_{n-1}(\varsigma)$. Luego

$$q_n(\delta^n_{\mathfrak{X}}(\varsigma)) = \delta^n_{\mathfrak{X}/\mathfrak{I}}(q_{n-1}(\varsigma)) = q_n(\varphi),$$

de donde existe $\varsigma_1 \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{I})$ tal que $\varphi - \delta_{\mathfrak{X}}^n(\varsigma) = \iota_n(\varsigma_1)$. Como $\iota_{n+1}$ es inyectiva y

$$\delta_{\mathfrak{X}}^{n+1}(\iota_n(\varsigma_1)) = \iota_{n+1}\left(\delta_{\mathfrak{I}}^{n+1}(\varsigma_1)\right) = 0$$

entonces $\varsigma_1 \in \mathcal{Z}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{I})$. Además $\iota_n^*(\varsigma_1 + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{I})) = \varphi + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$, i.e. $\operatorname{Im}(\iota_n^*) = \ker(q_n^*)$. Si $\chi \in \mathcal{Z}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$ entonces

$$\partial^n\left(q_{n-1}(\chi) + \mathcal{N}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}/\mathfrak{I})\right) = \iota_n^{-1}(\delta_{\mathfrak{X}}^n(\chi)) + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{I}) = 0,$$

de donde $\operatorname{Im}\left(q_{n-1}^*\right) \subseteq \ker(\partial^n)$. Sea $\zeta + \mathcal{N}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}/\mathfrak{I}) \in \ker(\partial^n)$, de modo que existe $\lambda \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{I})$ tal que $\iota_n^{-1}\delta_{\mathfrak{X}}^n q_{n-1}^{-1}\zeta = \delta_{\mathfrak{I}}^n(\lambda)$. Como

$$\delta_{\mathfrak{X}}^n\left(q_{n-1}^{-1}(\zeta)\right) = \iota_n(\delta_{\mathfrak{I}}^n(\lambda)) = \delta_{\mathfrak{X}}^n(\iota_{n-1}(\lambda))$$

entonces $q_{n-1}^{-1}(\zeta) - \iota_{n-1}(\lambda) \in \mathcal{Z}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$ y

$$q_{n-1}^*\left(q_{n-1}^{-1}(\zeta) - \iota_{n-1}(\lambda) + \mathcal{N}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})\right) = \zeta + \mathcal{N}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}/\mathfrak{I}),$$

i.e. $\operatorname{Im}\left(q_{n-1}^*\right) = \ker(\partial^n)$. Es inmediato que $\operatorname{Im}(\partial^n) \subseteq \ker(\iota_n^*)$. Si $\varsigma + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{I}) \in \ker(\iota_n^*)$ sea $\mu \in \mathcal{B}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$ tal que $\iota_n(\varsigma) = \delta_{\mathfrak{X}}^n(\mu)$. Haciendo $\mu_0 = q_{n-1}(\mu)$, como

$$\delta_{\mathfrak{X}/\mathfrak{I}}^n(\mu_0) = q_n(\delta_{\mathfrak{X}}^n(\mu)) = q_n(\iota_n(\varsigma)) = 0$$

es $\mu_0 \in \mathcal{Z}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}/\mathfrak{I})$ y

$$\partial^n\left(\mu_0 + \mathcal{N}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X}/\mathfrak{I})\right) = \iota_n^{-1}(\delta_{\mathfrak{X}}^n(\mu)) + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{I}) = \varsigma + \mathcal{N}^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{I}),$$

y $\operatorname{Im}(\partial^n) = \ker(\iota_n^*)$. $\square$

**Lema 4.2.40.** *Sea $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach con una aproximación acotada de la unidad $\{e_s\}_{s\in\sigma}$. Sea $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}-$bimódulo de Banach y sea $\mathbb{E}_1 = \{a.x.b\colon a,\ b \in \mathfrak{U},\ x \in \mathbb{E}\}$. Entonces;*

**(i)** $\mathbb{E}_1$ es un $\mathfrak{U}-$submódulo cerrado neo-unitario de $\mathbb{E}$.

**(ii)** $\mathbb{E}_1^{\perp}$ es complementable en $\mathbb{E}^*$, donde $\mathbb{E}_1^{\perp}$ indica el conjunto anulador de $\mathbb{E}_1$.

**(iii)** $\mathcal{H}^n(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) \approx \mathcal{H}^n(\mathfrak{U}, \mathbb{E}_1^*)$ para cualquier $n \geq 1$.

*Demostración.* **(i)** Se sigue razonando como en el corolario (4.2.37).

**(ii)** Notamos que $\mathcal{B}(\mathbb{E}^*) \approx \left(\mathbb{E}\widehat{\otimes}\mathbb{E}^*\right)^*$, ya que si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{E}^*)$ la aplicación

$$g_T : \mathbb{E} \times \mathbb{E}^* \to \mathbb{C},\ g_T(x, x^*) = T(x^*)(x),$$

es $\mathbb{C}-$lineal y acotada. Luego existe una única aplicación $\widetilde{T} \in \left(\mathbb{E}\widehat{\otimes}\mathbb{E}^*\right)^*$ tal que

$$\widetilde{T}\left(x \otimes x^*\right) = T\left(x^*\right)(x) = g_T\left(x, x^*\right)$$

si $x \in \mathbb{E}$, $x^* \in \mathbb{E}^*$. La aplicación $\Lambda$ que transforma a $T$ en $\widetilde{T}$ define el isomorfismo requerido de espacios de Banach, i.e. $\Lambda : \mathcal{B}\left(\mathbb{E}^*\right) \to \left(\mathbb{E}\widehat{\otimes}\mathbb{E}^*\right)^*$. Así

$$\|\Lambda T\| = \left\|\widetilde{T}\right\| = \|g_T\|$$

y entonces

$$\|g_T\| = \sup_{\|x\|=\|x^*\|=1} \left|g_T\left(x, x^*\right)\right| = \sup\left|T\left(x^*\right)\ x\right| \leq \|T\| \left\|x^*\right\| \|x\| \leq \|T\|.$$

Por lo tanto $\|\Lambda T\| \leq \|T\|$, de donde $\|\Lambda\| \leq 1$. Si $s \in \sigma$ quedan definidos $L_s$, $R_s \in \mathcal{B}\left(\mathbb{E}^*\right)$ mediante las fórmulas $L_s\left(x^*\right) = e_s \cdot x^*$ y $R_s\left(x^*\right) = x^* \cdot e_s$. Notar que $\text{máx}\left\{\|L_s\|, \|R_s\|\right\} \leq \|e_s\|$ para cualquier $s \in \sigma$. Como $\Lambda$ es acotado $\left\{\widetilde{L_s}\right\}_{s\in\sigma}$ y $\left\{\widetilde{R_s}\right\}_{s\in\sigma}$ devienen acotadas en $(\mathbb{E}\widehat{\otimes}\mathbb{E}^*)^*$. Pasando eventualmente a una subred $\sigma\prime$ exiten $\widetilde{L} = w^* - \text{lím}_{s\in\sigma\prime}\widetilde{L_s}$ y $\widetilde{R} = w^* - \text{lím}_{s\in\sigma\prime}\widetilde{R_s}$. Así, si $x \in \mathbb{E}$, $x^* \in \mathbb{E}^*$ tenemos que

$$\left\langle x \otimes x^*, \widetilde{L}\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle x \otimes x^*, \widetilde{L}_s\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle x, e_s \cdot x^*\right\rangle,$$
$$\left\langle x \otimes x^*, \widetilde{R}\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle x \otimes x^*, \widetilde{R}_s\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle x, x^* \cdot e_s\right\rangle.$$

En particular, existen únicos $L$, $R \in \mathcal{B}\left(\mathbb{E}^*\right)$ tales que $\Lambda(L) = \widetilde{L}$ y $\Lambda(R) = \widetilde{R}$,

$$\left\langle x, L \cdot x^*\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle x, e_s \cdot x^*\right\rangle \text{ y } \left\langle x, R.x^*\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle x, x^* \cdot e_s\right\rangle.$$

Si $\mathbb{E}_2 = \{a.x : a \in \mathfrak{U}, x \in \mathbb{E}\}$, sabemos que $\mathbb{E}_2$ es un $\mathfrak{U}-$submódulo cerrado a izquierda de $\mathbb{E}$. Como

$$\left\langle a \cdot x, R \cdot x^*\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle a \cdot x, x^* \cdot e_s\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle e_s \cdot a \cdot x, x^*\right\rangle = \left\langle a \cdot x, x^*\right\rangle$$

entonces $\left\langle a \cdot x, \left(\text{Id}_{\mathbb{E}^*} - R\right)\ x^*\right\rangle = 0$, i.e. $\text{Im}\left(\text{Id}_{\mathbb{E}^*} - R\right) \subseteq \mathbb{E}_2^{\perp}$. Si $x^* \in \mathbb{E}_2^{\perp}$ obtenemos

$$\left\langle x, R \cdot x^*\right\rangle = \lim_{s\in\sigma\prime}\left\langle e_s \cdot x, x^*\right\rangle = 0,$$

y deducimos que $R\left(\mathbb{E}_2^{\perp}\right) = \{0\}$. Si $x^* \in \mathbb{E}_2^{\perp}$, como

$$x^* = \left(\text{Id}_{\mathbb{E}^*} - R\right)\left(x^*\right) + R\left(x^*\right) = \left(\text{Id}_{\mathbb{E}^*} - R\right)\left(x^*\right),$$

$\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^*} - R$ es idéntica sobre $\mathbb{E}_2^\perp$ y $\mathbb{E}_2^\perp \subseteq \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^*} - R)$. Así $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^*} - R) = \mathbb{E}_2^\perp$ es cerrado. Más aún, $R^2 = R$ porque

$$
\begin{aligned}
\left\langle x, R^2\, x^* \right\rangle &= \lim_{s\in\sigma\prime} \langle e_s \cdot x, R\, x^* \rangle \\
&= \lim_{s\in\sigma\prime} \lim_{t\in\sigma\prime} \langle e_t\; e_s \cdot x,\; x^* \rangle \\
&= \lim_{s\in\sigma\prime} \langle e_s \cdot x,\; x^* \rangle \\
&= \langle x, R\, x^* \rangle\,.
\end{aligned}
$$

Entonces $\mathbb{E}^* = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^*} - R) \oplus \mathrm{Im}\,(R)$, y $R$ proyecta $\mathbb{E}^*$ sobre un complemento de $\mathbb{E}_2^\perp$ en $\mathbb{E}^*$. Para $L$ se obtienen conclusiones análogas. Si $\mathbb{E}_1 = \{x.b\colon x \in \mathbb{E}_2,\, b \in \mathfrak{U}\}$, como en el corolario (4.2.37) $\mathbb{E}_1$ deviene un $\mathfrak{U}-$submódulo cerrado de $\mathbb{E}_2$, y por lo tanto de $\mathbb{E}$. Como además

$$
\begin{aligned}
\langle a.x.b, R\; L\; x^* \rangle &= \lim_{s\in\sigma\prime} \langle e_s\; a\; x\; b, L\; x^* \rangle \\
&= \lim_{s\in\sigma\prime} \lim_{t\in\sigma\prime} \langle e_s\; a\; x\; b\; e_t, x^* \rangle \\
&= \lim_{s\in\sigma\prime} \langle e_s\; a\; x\; b,\; x^* \rangle \\
&= \langle a\; x\; b, x^* \rangle
\end{aligned}
$$

y $\langle x, R\; L\; x^* \rangle = \lim_{s\in\sigma\prime} \lim_{t\in\sigma\prime} \langle e_s\; x\; e_t, x^* \rangle = 0$ si $x^* \in \mathbb{E}_1^\perp$ entonces $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^*} - R\; L$ es un proyector de $\mathbb{E}^*$ en $\mathbb{E}_1^\perp$ y deducimos que $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}_1^\perp \oplus (\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^*} - R\; L)$.

**(iii)** Evidentemente $\mathfrak{U}\cdot (\mathbb{E}/\mathbb{E}_2) = \{0\}$. Reemplazando en la Prop. 4.2.39 $\mathfrak{X}$ por $\mathbb{E}^*$ e $\mathfrak{I}$ por $\mathbb{E}_2^\perp$, como $\mathbb{E}^*/\mathbb{E}_2^\perp \approx \mathbb{E}_2^*$, por la Prop. 4.2.31 obtenemos que

$$
\mathcal{H}^n\,(\mathfrak{U}, (\mathbb{E}/\mathbb{E}_2)^*) = \mathcal{H}^n\left(\mathfrak{U}, \mathbb{E}_2^\perp\right) = \{0\}\,.
$$

Luego

$$
0 \to H^n\,(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) \to H^n\left(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*/\mathbb{E}_2^\perp\right) = H^n\,(\mathfrak{U}, \mathbb{E}_2^*) \to 0
$$

es exacta, i.e. $\mathcal{H}^n\,(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*) \approx \mathcal{H}^n\,(\mathfrak{U}, \mathbb{E}_2^*)$. Repitiendo el argumento reemplazando $\mathbb{E}$ por $\mathbb{E}_2$ y $\mathbb{E}_2$ por $\mathbb{E}_1$ entonces sigue la tesis.

$\square$

## El proceso de extensión

Dados $\mu, \nu \in \mathcal{M}\,(G)$ y un subconjunto $E$ de $G$ escribiremos

$$
E_{\mu,\nu} = \{(a,b) \in G \times G : ab \in E\}\,.
$$

Entonces $E_{\mu,\nu}$ es subconjunto de Borel de $G \times G$ y se define $(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)(E_{\mu,\nu})$. Recordando que

$$\|\mu\| \triangleq |\mu|(G) \triangleq \sup \left\{ \sum_{E \in \mathcal{F}} |\mu(E)| : \mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{M}_\mu(G)) \right\},$$

donde $\mathcal{M}_\mu(G)$ es la $\sigma-$álgebra de subconjuntos $\mu-$medibles de $G$, entonces $(\mathcal{M}(G), *)$ es un álgebra de Banach. Además $L^1_{m_G}(G) \hookrightarrow \mathcal{M}(G)$ vía la aplicación $f \hookrightarrow f\, dm_G$, realizándose $L^1_{m_G}(G)$ como un ideal cerrado de $\mathcal{M}(G)$. Si $\mathbb{E}$ fuere un $L^1_{m_G}(G)-$bimódulo nos proponemos una vía que permita extender derivaciones $D : L^1_{m_G}(G) \to \mathbb{E}^*$ a derivaciones $\widetilde{D} : \mathcal{M}(G) \to \mathbb{E}^*$. En particular, será necesario extender la acción inicial sobre $\mathbb{E}$ a una acción de $\mathcal{M}(G)$ sobre $\mathbb{E}$.

**Definición 4.2.41.** Sean $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ álgebras de Banach tales que $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{U}$ es ideal cerrado de $\mathfrak{B}$. Dado $a \in \mathfrak{U}$ escribiremos $p_a(b) = \|a.b\| + \|b.a\|$ para $b \in \mathfrak{B}$. Entonces $\{p_a\}_{a \in \mathfrak{U}}$ es una familia de seminormas sobre $\mathfrak{B}$, la cual define sobre $\mathfrak{B}$ la llamada **topología estricta inducida por** $\mathfrak{U}$, la que denotaremos $\tau_{\mathfrak{U},\mathfrak{B}}$.

**Lema 4.2.42.** *(de Extensión) Sea $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach con una aproximación acotada de la unidad $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$, contenida como ideal cerrado en un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$. Sea $\mathbb{E}$ un $\mathfrak{U}-$bimódulo neo-unitario y sea $D \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{E}^*)$. Entonces $\mathbb{E}$ admite una estructura natural de $\mathfrak{B}-$bimódulo y existe una única $\widetilde{D} \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{B}, \mathbb{E}^*)$ tal que $\widetilde{D}\mid_{\mathfrak{U}} = D$ y $\widetilde{D}$ es $(\tau_{\mathfrak{U},\mathfrak{B}}, w^*)$ continua.*

*Demostración.* Sea $x \in \mathbb{E}$, digamos $x = ay$ con $a \in \mathfrak{U}$, $y \in \mathbb{E}$. Si $b \in \mathfrak{B}$ escribiremos $bx = (ba)\, y$. Si fuera $x = a\prime y\prime$, con $a\prime \in \mathfrak{U}$ e $y\prime \in \mathbb{E}$ entonces

$$(ba)\, y = \lim_{\alpha \in A} (be_\alpha a)\, y = \lim_{\alpha \in A} (be_\alpha)(ay) = \lim_{\alpha \in A} (be_\alpha)(a\prime y\prime) = \lim_{\alpha \in A} (be_\alpha a\prime)\, y\prime = (ba\prime)\, y\prime,$$

de modo que $b.x$ está bien definido. Así $\mathbb{E}$ deviene un $\mathfrak{B}-$módulo de Banach a izquierda y, análogamente, $\mathbb{E}$ es un $\mathfrak{B}-$módulo de Banach a derecha. En consecuencia, $\mathbb{E}$ es un $\mathfrak{B}-$bimódulo de Banach. Definimos ahora $\widetilde{D} : \mathfrak{B} \to \mathbb{E}^*$ como

$$\widetilde{D}(b) = \left( w^* - \lim_{\alpha \in A} \right) (D(be_\alpha) - bD(e_\alpha)).$$

Veamos que $\widetilde{D}$ está bien definida. Sea $x \in \mathbb{E}$, p.ej. $x = y.a$ con $y \in \mathbb{E}$ y $a \in \mathfrak{U}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\langle x, D(be_\alpha) - bD(e_\alpha) \rangle &= \langle ya, D(be_\alpha) - bD(e_\alpha) \rangle \\
&= \langle y, aD(be_\alpha) - abD(e_\alpha) \rangle \\
&= \langle y, D(a(be_\alpha)) - D(a)\, be_\alpha - abD(e_\alpha) \rangle \\
&= \langle e_\alpha y, D(ab) \rangle - \langle be_\alpha y, D(a) \rangle \to \langle y, D(ab) \rangle - \langle by, D(a) \rangle
\end{aligned}$$

pues $\mathbb{E}$ es $\mathfrak{U}-$neo-unitario. Además si $a \in \mathfrak{U}$ tenemos que

$$\widetilde{D}(a) = \left(w^* - \lim_{\alpha \in A}\right)(D(ae_\alpha) - aD(e_\alpha)) = \left(w^* - \lim_{\alpha \in A}\right)(Da)\ e_\alpha = D(a).$$

Por otra parte, dados $b \in \mathfrak{B}$ y $a \in \mathfrak{U}$ tenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(b)a &= \left(w^* - \lim_{\alpha \in A}\right)(D(be_\alpha)\ a - bD(e_\alpha)a) \\ &= \left(w^* - \lim_{\alpha \in A}\right)[D(be_\alpha a) - be_\alpha D(a) - bD(e_\alpha a) + be_\alpha D(a)] \\ &= \left(w^* - \lim_{\alpha \in A}\right)[D(be_\alpha a) - be_\alpha D(a) - b.D(e_\alpha a) + be_\alpha D(a)] \\ &= D(ba) - bD(a).\end{aligned}$$

En consecuencia, $\widetilde{D}$ es $(\tau_{\mathfrak{U},\mathfrak{B}}, w^*)$ continua: sean $\{b_s\}_{s\in\sigma}$ una red en $\mathfrak{B}$, $b \in \mathfrak{B}$ tales que $b = \tau_{\mathfrak{U},\mathfrak{B}} - \lim_{s\in\sigma} b_s$. Dado $x \in \mathbb{E}$ podemos escribir $x = ay$ para ciertos $a \in \mathfrak{U}$ e $y \in \mathbb{E}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\left\langle x, \widetilde{D}(b_s - b)\right\rangle &= \left\langle ay, \widetilde{D}(b_s - b)\right\rangle \\ &= \left\langle y, \widetilde{D}(b_s - b)a\right\rangle \\ &= \langle y, D((b_s - b)a) - (b_s - b)D(a)\rangle \\ &= \langle y, D((b_s - b)a)\rangle - \langle y\ (b_s - b), D(a)\rangle.\end{aligned}$$

Si $y = zc$ con $z \in \mathbb{E}$ y $c \in \mathfrak{U}$ entonces sabemos que $p_a(b_s - b) \to 0$ y $p_c(b_s - b) \to 0$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\left|\left\langle x, \widetilde{D}(b_s - b)\right\rangle\right| &\leq \|y\|\,\|D\|\,\|(b_s - b)a\| + \|z\|\,\|c(b_s - b)\|\,\|D(a)\| \\ &\leq \|y\|\,\|D\|\,p_a(b_s - b) + \|z\|\,p_c(b_s - b)\,\|D(a)\|,\end{aligned}$$

i.e. $\widetilde{D}\ b_s \underset{\longrightarrow}{w^*} \widetilde{D}\ b$. Si $b, c \in \mathfrak{B}$, como evidentemente $d \cdot e_\alpha \underset{\longrightarrow}{\tau_{\mathfrak{U},\mathfrak{B}}} d$ para cada $d \in \mathfrak{B}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(bc) &= \left(w^* - \lim_{\alpha}\right)\left(w^* - \lim_{\beta}\right)D((be_\alpha)(ce_\beta)) \\ &= \left(w^* - \lim_{\alpha}\right)\left(w^* - \lim_{\beta}\right)[be_\alpha D(ce_\beta) + D(be_\alpha)ce_\beta] \\ &= b\widetilde{D}(c) + \widetilde{D}(b)c\end{aligned}$$

i.e. $\widetilde{D} \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{B}, \mathbb{E}^*)$. Para ver la unicidad de $\widetilde{D}$ supongamos que existe $\delta \in \mathcal{Z}^1(\mathfrak{B}, \mathbb{E}^*)$ tal que la restricción de $\delta$ a $\mathfrak{U}$ es $D$ y $\delta$ es $(\tau_{\mathfrak{U},\mathfrak{B}}, w^*)$ continua. Si $b \in \mathfrak{B}$ tenemos

$$\widetilde{D}(b) = \left(w^* - \lim_{\alpha \in A}\right)[D(be_\alpha) - bD(e_\alpha)] = \left(w^* - \lim_{\alpha \in A}\right)[\delta(be_\alpha) - b\delta(e_\alpha)].$$

Dado $x \in \mathbb{E}$, si $x = ay$ con $a \in \mathfrak{U}$ e $y \in \mathbb{E}$ resulta

$$\begin{aligned}\left\langle x, \widetilde{D}(b)\right\rangle &= \lim_{\alpha \in A} \langle ay, \delta(be_\alpha) - b\delta(e_\alpha)\rangle \\ &= \lim_{\alpha \in A} \langle a\, y, \delta(b)\, e_\alpha\rangle \\ &= \lim_{\alpha \in A} \langle e_\alpha a y, \delta(b)\rangle \\ &= \langle ay, \delta(b)\rangle \\ &= \langle x, \delta(b)\rangle,\end{aligned}$$

o sea, $\widetilde{D}(b) = \delta(b)$ y sigue la unicidad de $\widetilde{D}$. □

**Observación 4.2.43.** Hay una aplicación natural $\delta : G \to C_0(G)^*$ tal que $\delta(a) f = f(a)$ si $a \in G$ y $f \in C_0(G)$. Veamos que $\mathbb{C}[\delta(G)]$ es $w^*-$denso en $C_0(G)^*$, donde $\mathbb{C}[\delta(G)]$ denota la cápsula lineal compleja generada por $\delta(G)$. En efecto, $\mathcal{M}(G) \approx C_0(G)^*$ como sigue del teorema de representación de Riesz (cf. [5], p. 378). Fijada $T_0 \in \mathrm{B}_{C_0(G)^*}[0,1]$ existe un único $\mu_0 \in \mathcal{M}(G)$ tal que $T_0 f = \int_G f d\mu_0$ y además $\|T_0\| = \|\mu_0\|$. Si $f_1, ..., f_n \in C_0(G)$ y $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\mathcal{W} = \left\{\mu \in \mathcal{M}(G) : \max_{1 \le j \le n} \left|\int_G f_j\, d(\mu - \mu_0)\right| \le \varepsilon\right\}$$

es un $w^*-$entorno de $\mu_0$. Veamos que $\mathbb{C}[\delta(G)] \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. En efecto, podemos suponer que $f_1, ..., f_n$ son linealmente independientes. Dado $b \in G$ sea $\mathbf{f}_b = (f_1(b), ..., f_n(b))$. Si $\mathbb{C}[\mathbf{f}_b]_{b \in G} \neq \mathbb{C}^n$ existirá $z \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $\langle \mathbf{f}_b, z\rangle = 0$ para todo $b \in G$, lo cual es contradictorio con la hipótesis de independencia lineal de $f_1, ..., f_n$. En consecuencia, existe $F \in \mathcal{P}_f(G)$ y un conjunto de escalares $\{z_b\}_{b \in F}$ tales que

$$\left(\int_G f_1 \mu_0, ..., \int_G f_n \mu_0\right) = \sum_{b \in F} z_b \cdot \mathbf{f}_b = \sum_{b \in F} z_b \cdot (f_1(b), ..., f_n(b)).$$

Haciendo $\mu = \sum_{b \in F} z_b \delta(b)$ entonces $\mu \in \mathbb{C}[\delta(G)] \cap \mathcal{W}$, pues

$$\int_G f_j\, d\mu_0 - \mu(f_j) = \int_G f_j d\mu_0 - \sum_{b \in F} z_b\, \delta(b) f_j = \int_G f_j\, d\mu_0 - \sum_{b \in F} z_b\, f_j(b) = 0$$

si $j = 1, ..., n$.

**Observación 4.2.44.** Por la Obs. 4.2.43 y el teorema de Riesz sabemos que $\mathbb{C}[\delta(G)]$ es $w^*$-denso en $\mathcal{M}(G)$. Más aún, $\mathbb{C}[\delta(G)]$ es $\tau_{L^1_{m_G}(G), \mathcal{M}(G)}$-denso en $\mathcal{M}(G)$ (cf. [33], p. 236). En consecuencia es válido el siguiente

**Corolario 4.2.45.** *Si $\mathbb{E}$ es un $L^1_{m_G}(G)$ −bimódulo de Banach neo-unitario y $L^1_{m_G}(G) \underset{\to}{D}$ $\mathbb{E}^*$ es una derivación acotada existe un único $\widetilde{D} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{M}(G), \mathbb{E}^*)$ tal que $\widetilde{D}\mid_{L^1_{m_G}(G)}=$ $D$, siendo $\widetilde{D}$ un operador $(\tau_{L^1_{m_G}(G),\mathcal{M}(G)}, w^*)$ continuo. En particular, $\widetilde{D}$ queda determinado por sus valores sobre $\delta(G)$.*

**Observación 4.2.46.** Notemos que $L^1_{m_G}(G)$ es un $\mathcal{M}(G)-$bimódulo de Banach. Precisamente, sean $f \in L^1_{m_G}(G)$, $\mu \in \mathcal{M}(G)$ escribiremos formalmente

$$(\mu * f)(a) = \int_G f\left(b^{-1}a\right)\, d\mu(b), \;\; (f * \mu)(a) = \int_G f\left(ab^{-1}\right)\, \Delta_G(b)\, d\mu(b). \quad (4.40)$$

La fórmula (4.40) define sendas funciones de $L^1_{m_G}(G)$ por lo siguiente: Usando el teorema de Fubini-Tonelli y la invariancia de la medida de Haar tenemos

$$\iint\limits_{G\times G} \left|f\left(b^{-1}a\right)\right| d\left(m_G \times |\mu|\right)(a,b) = \int_G\int_G \left|f\left(b^{-1}a\right)\right| dm_G(a) d|\mu|(b) = \|f\|_1 \|\mu\| < \infty.$$

En consecuencia, por el teorema de Fubini $\int_G |f(b^{-1}a)|\; d|\mu|(b) < \infty$ salvo un conjunto de $m_G$-medida nula, la función $a \to (\mu * f)(a)$ deviene $m_G-$medible y

$$\int_G |(\mu * f)(a)|\; dm_G(a) \leq \int_G\int_G \left|f\left(b^{-1}a\right)\right|\; d|\mu|(b) \leq \|f\|_1 \|\mu\|,$$

o sea $\mu * f \in L^1_{m_G}(G)$ y $\|\mu * f\|_1 \leq \|f\|_1 \|\mu\|$. Por otra parte, en (4.40) $\Delta_G : G \to (0, +\infty)$ es la **función modular** asociada a la medida de Haar de $G$. Se trata de un homomorfismo continuo único de manera que $m_G(E \cdot a) = \Delta_G(a) \cdot m_G(E)$ para cada subconjunto de Borel $E$ de $G$. Que $L^1_{m_G}(G)$ es un $\mathcal{M}(G)$ −módulo de Banach a derecha sigue como recién, considerando que para $g \in L^1_{m_G}(G)$ resulta la identidad:

$$\int_G g(a)\, dm_G(a) = \int_G g(a^{-1})\, \Delta_G(a^{-1})\, dm_G(a).$$

## El teorema de Day

**Teorema 4.2.47.** *(M. M. Day, [7]) Sea $G$ un grupo localmente compacto amenable. Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial localmente convexo y sea $K$ un subconjunto compacto convexo de $\mathbb{E}$. Suponemos que $G$ actúa sabre $K$ en forma afín, o sea*

$$g \cdot [tx + (1-t)\, y] = t(g \cdot x) + (1-t)\,(g \cdot y)$$

*para cualquier $g \in G$, $x, y \in K$ y $t \in [0,1]$. Más aún, supondremos que la aplicación $(g, x) \to g \cdot x$ de $G \times K$ en $K$ es separadamente continua. Entonces existe un elemento $x_0 \in K$ tal que $g \cdot x_0 = x_0$ para cualquier $g \in G$.*

*Demostración.* Sea $x_0 \in K$ fijo. Sea $\mathcal{A}(K)$ la clase de funciones continuas afines de $K$ en $\mathbb{C}$. Notar que si $\zeta \in \mathbb{E}^*$ entonces $\zeta|_K \in \mathcal{A}(K)$. Dada $\psi \in \mathcal{A}(K)$ sea $\phi_\psi : G \to \mathbb{C}$ tal que $\phi_\psi(g) = \psi(g \cdot x_0)$ para cualquier $g \in G$. Como $(g, x) \to g \cdot x$ es continua sobre $G$ para cada $x \in K$ fijo entonces $\phi_\psi \in C_b(G)$, ya que

$$\sup_{g \in G} |\psi(g \cdot x_0)| \leq \sup_{y \in K} |\psi(y)| < \infty$$

pues $\psi$ es continua y $K$ compacto. Sea $m \in \mathcal{L}^\infty(G)^*$ un promedio invariante a izquierda y sea $n = m|_{C_b(G)}$. Si $a \in G$ y $\phi \in C_b(G)$ entonces la aplicación

$$c \to (\delta_a * \phi)(c) = \int_G \phi\left(b^{-1}c\right) \, d\delta_a(b) = \phi\left(a^{-1}c\right)$$

define evidentemente un elemento de $C_b(G)$. Como

$$\langle \delta_a * \phi, n \rangle = \langle \delta_a * \phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle = \langle \phi, n \rangle$$

$n$ es invariante a izquierda y $\langle 1, n \rangle = \langle 1, m \rangle = 1$. Como $\|n\| \leq \|m\| = 1$, entonces $\|n\| = 1$ y $n$ es un promedio invariante sobre $C_b(G)$. Siendo $G$ grupo localmente compacto, sea $\mathcal{P}_b(G)$ el conjunto de funcionales $m \in C_b(G)^*$ invariantes, en el sentido que estamos desarrollando, tales que $\langle 1, m \rangle = \|m\| = 1$.Entonces $\mathcal{P}_b(G) = \overline{\mathrm{Co}\left(\delta_g\right)_{g \in G}}^{w^*}$, como puede verse como en la Obs. 4.2.43. Sea $\{n_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una red en $\mathrm{Co}\left(\delta_g\right)_{g \in G}$ tal que $n = w^* - \lim_{\alpha \in A} n_\alpha$. Si $\alpha \in A$ es fijo podemos escribir $n_\alpha = \sum_{j=1}^{j(\alpha)} t_j^\alpha \, \delta_{g_j^\alpha}$, donde $\sum_{j=1}^{j(\alpha)} t_j^\alpha = 1$ y $t_j^\alpha \in [0, 1]$ para cada $\alpha$ y cada $j$. Dado $\psi \in \mathcal{A}(K)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \phi_\psi, n_\alpha \rangle &= \int_G \psi(g \cdot x_0) \, dn_\alpha(g) \\
&= \sum_{j=1}^{j(\alpha)} t_j^\alpha \int_G \psi(g \cdot x_0) \, d\delta_{g_j^\alpha}(g) \\
&= \sum_{j=1}^{j(\alpha)} t_j^\alpha \, \psi\left(g_j^\alpha \cdot x_0\right) \\
&= \psi\left[\left(\sum_{j=1}^{j(\alpha)} t_j^\alpha \, g_j^\alpha\right) \cdot x_0\right] = \psi(x_\alpha),
\end{aligned}$$

donde $x_\alpha = \left(\sum_{j=1}^{n} t_j^\alpha \, g_j^\alpha\right) \cdot x_0$ en $K$. En particular, la red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $K$ contiene una subred $\{x_{\alpha'}\}_{\alpha' \in A'}$ convergente a cierto $x \in K$, pues $K$ es compacto. Si $\psi \in \mathcal{A}(K)$ obtenemos $\psi(x) = \lim_{\alpha' \in A'} \psi(x_{\alpha'}) = \lim_{\alpha' \in A'} \langle \phi_\psi, n_{\alpha'} \rangle$. Veamos entonces que $g.x = x$

para cualquier $g \in G$. Sean $g \in G$, $\zeta \in \mathbb{E}^*$, $\psi_{g,\zeta} : K \to \mathbb{C}$ tal que $\psi_{g,\zeta}(x) = \langle g.x, \zeta \rangle$. Entonces $\psi_{g,\zeta}$ es continua, pues $x \to g.x$ es continua sobre $K$ para cada $g \in G$ fijo. Evidentemente ahora $\psi_{g,\zeta} \in \mathcal{A}(K)$. Además si $h \in G$, tenemos

$$\begin{aligned}
\phi_{\psi_{g,\zeta}}(h) &= \psi_{g,\zeta}(h \cdot x_0) \\
&= \langle g \cdot (h \cdot x_0), \zeta \rangle \\
&= \langle (g \cdot h) \cdot x_0, \zeta \rangle \\
&= \psi_{g,\zeta}((g \cdot h) \cdot x_0) \\
&= \phi_{\psi_{g,\zeta}}(g \cdot h) \\
&= \int\limits_G \phi_{\psi_{g,\zeta}}\left(s^{-1}h\right) \, d\delta_{g^{-1}}(s) = \left(\delta_{g^{-1}} * \phi_{\psi_{g,\zeta}}\right)(h).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\langle g.x, \zeta \rangle = \psi_{g,\zeta}(x) = \left\langle \phi_{\psi_{g,\zeta}}, n \right\rangle = \left\langle \delta_{g^{-1}} * \phi_{\psi_{g,\zeta}}, n \right\rangle = \left\langle \phi_{\psi_{g,\zeta}}, n \right\rangle = \psi_{g,\zeta}(x) = \langle x, \zeta \rangle$$

para cualquier $\zeta \in \mathbb{E}^*$, i.e. $g \cdot x = x$. □

## Estructura de funcionales acotadas sobre $L^\infty(G)$

**Lema 4.2.48.** *$L^\infty(G)^* \approx \mathcal{M}(\mathcal{H}(L^\infty(G)))$, donde $\approx$ indica isomorfismo isométrico de espacios de Banach.*

*Demostración.* Sean $\Psi \in L^\infty(G)^*$, $\mathcal{F} : L^\infty(G) \to C(\mathcal{H}(L^\infty(G)))$ la transformada de Gelfand y $\mathcal{H}(L^\infty(G))$ el espacio ideal maximal de $L^\infty(G)$. Entonces tenemos que

$$C(\mathcal{H}(L^\infty(G))) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} L^\infty(G) \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}$$

o sea $\Psi \circ \mathcal{F}^{-1} \in C(\mathcal{H}(L^\infty(G)))^*$. Por el teorema de Riesz (cf. [34], Th. 2.14, p. 42) existe una única aplicación $\mu = \mu(\Psi) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}(L^\infty(G)))$ tal que

$$\left(\Psi\mathcal{F}^{-1}\right)(f) = \int\limits_{\mathcal{H}(L^\infty(G))} f(h) \, d\mu_\Psi(h)$$

para cualquier $f \in C(\mathcal{H}(L^\infty(G)))$. Si $\mathcal{F}^{-1}(f) = \phi \in L^\infty(G)$, $f(h) = \mathcal{F}(\phi)h = h(\phi)$ para cualquier $h \in \mathcal{H}(L^\infty(G))$ y

$$\Psi(\phi) = \int_{\mathcal{H}(L^\infty(G))} h(\phi) \, d\mu_\Psi(h).$$

Además, puesto que $\mathcal{F}$ es un isomorfismo isométrico obtenemos

$$\|\mu_\Psi\| = \left\|\Psi \, \mathcal{F}^{-1}\right\| = \sup_{\|f\|_{C(\mathcal{H}(L^\infty(G)))}=1} \left|\Psi\mathcal{F}^{-1}f\right| = \sup_{\|\phi\|=1} |\Psi(\phi)| = \|\Psi\|$$

Sea entonces $\mu : L^{\infty}(G)^{*} \to \mathcal{M}\left(\mathcal{H}\left(L^{\infty}(G)\right)\right)$ dada por $\mu\left(\Psi\right) = \mu_{\Psi}$. Entonces $\mu$ es $\mathbb{C}-$lineal isométrica. Si $\sigma \in \mathcal{M}\left(\mathcal{H}\left(L^{\infty}(G)\right)\right)$ sea

$$\Psi_{\sigma}\left(\phi\right) \triangleq \int_{\mathcal{H}(L^{\infty}(G))} h\left(\phi\right)\ d\sigma\left(h\right)$$

para cualquier $\phi \in L^{\infty}(G)$. Como $\int_{\mathcal{H}(L^{\infty}(G))} \left|h\left(\phi\right)\right|\ d\left|\sigma\right|\left(h\right) \leq \left\|\phi\right\| \left\|\sigma\right\| < \infty$ tenemos que $\Psi_{\sigma}$ está bien definida. Además $\Psi_{\sigma}$ es $\mathbb{C}-$lineal y $\left|\Psi_{\sigma}\left(\phi\right)\right| \leq \left\|\phi\right\| \left\|\sigma\right\|$ para cualquier $\phi$, o sea $\left\|\Psi_{\sigma}\right\| \leq \left\|\sigma\right\|$, i.e. $\Psi_{\sigma} \in L^{\infty}(G)^{*}$. Necesariamente, $\sigma = \mu\left(\Psi_{\sigma}\right)$, $\mu$ es suryectiva y sigue la tesis. $\square$

## Caracterización de grupos amenables

**Teorema 4.2.49.** *(Johnson) Sea $G$ un grupo localmente compacto. Entonces $G$ es amenable si y solo si $\mathcal{H}^{1}\left(L^{1}\left(G\right), \mathbb{E}^{*}\right) = \{0\}$ para cualquier $L^{1}\left(G\right)-$bimódulo de Banach $\mathbb{E}$.*

*Demostración.* Supongamos que $G$ es amenable y sea $\mathbb{E}$ un $L^{1}\left(G\right)-$bimódulo de Banach, el que podemos suponer neo-unitario. Sea $D \in \mathcal{Z}^{1}\left(L^{1}\left(G\right), \mathbb{E}^{*}\right)$ y sea $\widetilde{D} \in \mathcal{Z}^{1}\left(\mathcal{M}\left(G\right), \mathbb{E}^{*}\right)$ única extensión de $D$ continua respecto a la topología estricta de $\mathcal{M}\left(G\right)$ inducida por $L^{1}\left(G\right)$ y $w^{*}$ de $\mathbb{E}^{*}$. Bastará ver que $\widetilde{D}$ es interna. Sea $K = \overline{\mathrm{Co}\left\{\left(\widetilde{D}\delta_{a}\right)\delta_{a^{-1}} : a \in G\right\}}^{w^{*}}$ en $\mathbb{E}^{*}$. Entonces $K$ es convexo y es $w^{*}-$compacto. En efecto, si $\sigma = \sum_{j=1}^{n} t_{j}\ \widetilde{D}\left(\delta_{a_{j}}\right)$ $\delta_{a_{j}^{-1}}$ es una combinación convexa de $\widetilde{D}\left(\delta_{a_{1}}\right)\delta_{a_{1}^{-1}}, ..., \widetilde{D}\left(\delta_{a_{n}}\right)\delta_{a_{n}^{-1}}$ y si $x \in \mathbb{E}$ se tiene que

$$\left\langle x, \sigma\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} t_{j}\left\langle \delta_{a_{j}^{-1}}x, \widetilde{D}\left(\delta_{a_{j}}\right)\right\rangle. \tag{4.41}$$

Si $\left\{e_{\alpha}\right\}_{\alpha \in A}$ es aproximación acotada de la unidad de $L^{1}\left(G\right)$ y $a \in G$ entonces

$$\left\langle \delta_{a^{-1}}x, \widetilde{D}\left(\delta_{a}\right)\right\rangle = \lim_{\alpha}\left\langle \delta_{a^{-1}}x, D\left(\delta_{a}e_{\alpha}\right) - \delta_{a}D\left(e_{\alpha}\right)\right\rangle. \tag{4.42}$$

Pero para cada $\alpha \in A$ se tiene

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \delta_{a^{-1}}x, D\left(\delta_{a}e_{\alpha}\right) - \delta_{a}D\left(e_{\alpha}\right)\right\rangle\right| &\leq \left\|\delta_{a^{-1}}x\right\| \left\|D\left(\delta_{a}e_{\alpha}\right) - \delta_{a}D\left(e_{\alpha}\right)\right\| \\ &\leq \left\|x\right\| \left[\left\|D\left(\delta_{a}e_{\alpha}\right)\right\| + \left\|\delta_{a}D\left(e_{\alpha}\right)\right\|\right] \\ &\leq \left\|x\right\| \left[\left\|D\right\| \left\|\delta_{a}e_{\alpha}\right\| + \left\|\delta_{a}\right\| \left\|D\left(e_{\alpha}\right)\right\|\right] \\ &\leq 2\left\|x\right\| \left\|D\right\| \left\|\delta_{a}\right\| \left\|e_{\alpha}\right\| \\ &\leq 2\left\|x\right\| \left\|D\right\| \sup_{\alpha \in A}\left\|e_{\alpha}\right\|. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Por (4.41), (4.42) y (4.43) es

$$|\langle x,\sigma\rangle| \leq 2\|D\| \left(\sup_{\alpha\in A}\|e_\alpha\|\right)\|x\|,$$

i.e. como $K$ está contenido en la bola de $\mathbb{E}^*$ centrada en cero y radio $2\|D\|\sup_{\alpha\in A}\|e_\alpha\|$ resulta $w^*-$compacto. Ahora consideremos la siguiente acción de $G$ sobre $\mathbb{E}^*$,

$$a\cdot x^* = \delta_a\cdot x^*\cdot\delta_{a^{-1}} + (\widetilde{D}\delta_a)\cdot\delta_{a^{-1}} \tag{4.44}$$

donde $a\in G$ y $x^*\in\mathbb{E}^*$. Si $a,b\in G$ tenemos que

$$\begin{aligned}(ab)\cdot x^* &= \delta_{ab}\cdot x^*\cdot\delta_{(ab)^{-1}} + (\widetilde{D}\delta_{ab})\cdot\delta_{(ab)^{-1}}\\ &= (\delta_a*\delta_b)\cdot x^*\cdot(\delta_{b^{-1}}*\delta_{a^{-1}}) + \widetilde{D}\,(\delta_a*\delta_b)\cdot(\delta_{b^{-1}}*\delta_{a^{-1}})\\ &= (\delta_a*\delta_b)\cdot x^*\cdot(\delta_{b^{-1}}*\delta_{a^{-1}}) + \left[\widetilde{D}\,(\delta_a)\cdot\delta_b + \delta_a\cdot\widetilde{D}\,(\delta_b)\right](\delta_{b^{-1}}*\delta_{a^{-1}})\\ &= \delta_a\cdot\left(\delta_b\cdot x^*\cdot\delta_{b^{-1}} + \widetilde{D}\,(\delta_b)\,\delta_{b^{-1}}\right)\cdot\delta_{a^{-1}} + \widetilde{D}\,(\delta_a)\;\delta_{a^{-1}}\\ &= \delta_a\cdot(b\cdot x^*)\,\delta_{a^{-1}} + \widetilde{D}\,(\delta_a)\cdot\delta_{a^{-1}}\\ &= a\cdot(b\cdot x^*)\,.\end{aligned}$$

Como evidentemente $e\cdot x^* = x^*$ si $x^*\in\mathbb{E}^*$ (4.44) define una buena acción de $G$ sobre $\mathbb{E}^*$. En particular, la misma es afín sobre $\mathbb{E}^*$. También es $w^*$-continua en la segunda variable: sean $x^* = w^* - \lim_{\nu\in\mathcal{N}} x_v^*$ en $\mathbb{E}^*$, $a\in G$, $x\in G$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle x, a\cdot x^*\rangle &= \left\langle x, \delta_a\cdot x^*\cdot\delta_{a^{-1}} + (\widetilde{D}\delta_a)\cdot\delta_{a^{-1}}\right\rangle\\ &= \langle\delta_{a^{-1}}\cdot x\cdot\delta_a, x^*\rangle + \left\langle x, \left(\widetilde{D}\delta_a\right)\delta_{a^{-1}}\right\rangle\\ &= \lim_{\nu\in\mathcal{N}}\langle\delta_{a^{-1}}\cdot x\cdot\delta_a, x_v^*\rangle + \left\langle x, \left(\widetilde{D}\delta_a\right)\delta_{a^{-1}}\right\rangle\\ &= \lim_{\nu\in\mathcal{N}}\left\langle x, \delta_a\cdot x_v^*\cdot\delta_{a^{-1}} + (\widetilde{D}\delta_a)\delta_{a^{-1}}\right\rangle\\ &= \lim_{\nu\in\mathcal{N}}\langle x, a\cdot x_v^*\rangle\,.\end{aligned}$$

Respecto a la primera variable, la acción (4.44) es continua respecto a la topología de $G$ y a la $w^*-$topología de $\mathbb{E}^*$. En efecto, sea $a_v\to a$ en $G$, $x^*\in\mathbb{E}^*$ y veamos que

$$(a_v - a)\cdot x^*\underset{\longrightarrow}{w^*}0$$

Para ello, bastará ver que $\delta_{a_v}\to\delta_a$ en $\mathcal{M}(G)$ respecto a la $L^1(G)$ topología estricta inducida, pues entonces

$$\begin{aligned}\langle x, a_v\cdot x^*\rangle &= \left\langle x, \delta_{a_v}\cdot x^*\cdot\delta_{a_v^{-1}} + (\widetilde{D}\delta_{a_v})\cdot\delta_{a_v^{-1}}\right\rangle\\ &= \left\langle\delta_{a_v^{-1}}\cdot x\cdot\delta_{a_v}, x^*\right\rangle + \left\langle\delta_{a_v^{-1}}\cdot x, \widetilde{D}\delta_{a_v}\right\rangle \to \langle\delta_{a^{-1}}\cdot x\cdot\delta_a, x^*\rangle + \left\langle\delta_{a^{-1}}\cdot x, \widetilde{D}\delta_a\right\rangle\\ &= \langle x, a\cdot x^*\rangle\,.\end{aligned}$$

Entonces, por la Obs. 4.2.46 sabemos que si $f \in L^1(G)$ resultan

$$(\delta_a * f)(c) = f\left(a_v^{-1}c\right) \text{ y } (f * \delta_{a_v})(c) = f\left(ca_v^{-1}\right)\Delta\left(a^{-1}\right)$$

salvo elementos de un subconjunto de $m_G-$ medida nula de $G$. Dado $\nu$ obtenemos:

$$\begin{aligned} p_f(\delta_{a_v} - \delta_a) = & \int_G \left|f\left(a_v^{-1}c\right) - f\left(a^{-1}c\right)\right| \, dm_G(c) \\ & + \int_G \left|f\left(ca_v^{-1}\right)\Delta\left(a_v^{-1}\right) - f\left(ca^{-1}\right)\Delta\left(a^{-1}\right)\right| \, dm_G(c). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Si $f \in C_c(G)$, como

$$f\left(a_v^{-1}c\right) \to f\left(a^{-1}c\right) \;\; y \;\; f\left(ca_v^{-1}\right)\Delta\left(a_v^{-1}\right) \to f\left(ca^{-1}\right)\Delta\left(a^{-1}\right)$$

para todo $c \in G$, la afirmación sigue pasando al límite en (4.45) por el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue. En el caso general, basta apelar a la densidad de la clase de funciones continuas con soporte compacto en $L^1(G)$ (cf. [16], Th. 12.10, p. 140). Luego $K$ es invariante bajo la acción de $G$ definida en (4.44). En efecto, dados $a, b \in G$, tenemos

$$\begin{aligned} a\widetilde{D}(\delta_b)\delta_{b^{-1}} &= \delta_a\widetilde{D}(\delta_b)\delta_{b^{-1}}\delta_{a^{-1}} + \widetilde{D}(\delta_a)\delta_{a^{-1}} \\ &= \widetilde{D}(\delta_a\delta_b)(\delta_{b^{-1}}\delta_{a^{-1}}) \\ &= \widetilde{D}(\delta_{ab})\left(\delta_{(ab)^{-1}}\right). \end{aligned}$$

Como la acción es afín, sigue la afirmación. Además, por el Teorema de Day, existe $x_0^* \in K$ tal que

$$ax_0^* = \delta_a x_0^* \delta_{a^{-1}} + \widetilde{D}(\delta_a)\delta_{a^{-1}} = x_0^*$$

para cualquier $a \in G$. De dicha igualdad se obtiene que

$$\widetilde{D}(\delta_a) = x_0^*\delta_a - \delta_a x_0^* = ad_{-x_0^*}(\delta_a).$$

Por último, ya hemos señalado en la Obs. 4.2.44 que $\{\delta_a : a \in G\}$ determina los valores de $\widetilde{D}$ sobre $\mathcal{M}(G)$ y podemos concluir que $\widetilde{D}$, y por lo tanto $D$, son internas. Recíprocamente, supongamos que $L^1(G)$ es amenable. En principio vamos a definir una estructura de $L^1(G)-$bimódulo de Banach sobre $L^\infty(G)$. Dadas $f \in L^1(G)$, $\phi \in L^\infty(G)$ haremos, para $a \in G$ salvo quizás un subconjunto de $m_G-$medida nula,

$$(f \cdot \phi)(a) \triangleq (f * \phi)(a) = \int_G f(b)\ \phi\left(b^{-1}a\right)\ db. \tag{4.46}$$

Es fácil ver que (4.46) define una acción a izquierda de $L^1(G)$ sobre $L^\infty(G)$. Por otra parte sea

$$\phi \cdot f \triangleq \left( \int_G f \; dm_G \right) \phi.$$

Sean $n \in L^\infty(G)^*$ tal que $\langle 1, n \rangle = 1$ y $d : L^1(G) \to L^\infty(G)^*$ tal que $d(f) = fn - nf$. Entonces, $\langle 1, d(f) \rangle = \langle 1, fn - nf \rangle = \langle 1 * f - f * 1, n \rangle$. Observemos que

$$1 * f = \left( \int_G f \; dm_G \right) \cdot 1, \;\; (f * 1)(a) = \int_G f(b) \; dm_G(b)$$

para casi toda $a \in G$. Luego $\langle 1, d(f) \rangle = 0$ si $f \in L^1(G)$. Sea $\mathbb{E} = L^\infty(G) / \mathbb{C} \cdot 1$. Dadas $f \in L^1(G)$, $\phi \in L^\infty(G)$, si $p : L^\infty(G) \to \mathbb{E}$ es la proyección al cociente definimos $\left\langle p(\phi), \widetilde{d}(f) \right\rangle = \langle \phi, d(f) \rangle$. Esta funcional $\widetilde{d}$ está bien definida pues si $p(\phi) = p(\psi)$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\phi - \psi = \lambda \cdot 1$. Luego

$$\langle \phi - \psi, d(f) \rangle = \langle \lambda \cdot 1, d(f) \rangle = \lambda \langle 1, d(f) \rangle = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Evidentemente $\widetilde{d}(f)$ es $\mathbb{C}-$lineal y

$$\left| \left\langle p(\phi), \widetilde{d}(f) \right\rangle \right| \leq \|\phi\| \, \|d(f)\|$$

cualquiera sea el representante $\phi$ de $p(\phi)$, de donde

$$\left| \left\langle p(\phi), \widetilde{d}(f) \right\rangle \right| \leq \|p(\phi)\| \, \|d(f)\|,$$

i.e. $\widetilde{d}(f)$ es acotada y $\left\| \widetilde{d}(f) \right\| \leq \|d(f)\|$. Queda inducida $\widetilde{d} : L^1(G) \to \mathbb{E}^*$. Notando que $p$ es un homomorfismo de $L^1(G)$ $-$bimódulos si $f, g \in L^1(G)$ y $\phi \in L^\infty(G)$ entonces

$$\begin{aligned} \left\langle p(\phi), \widetilde{d}(f \cdot g) \right\rangle &= \langle \phi, d(f \cdot g) \rangle \\ &= \langle \phi, f \cdot d(g) + d(f) \cdot g \rangle \\ &= \langle \phi \cdot f, d(g) \rangle + \langle g \cdot \phi, d(f) \rangle \\ &= \left\langle p(\phi \cdot f), \widetilde{d}(g) \right\rangle + \left\langle p(g \cdot \phi), \widetilde{d}(f) \right\rangle \\ &= \left\langle p(\phi) \cdot f, \widetilde{d}(g) \right\rangle + \left\langle g \cdot p(\phi), \widetilde{d}(f) \right\rangle \\ &= \left\langle p(\phi), f \cdot \widetilde{d}(g) + \widetilde{d}(f) \cdot g \right\rangle \end{aligned}$$

Así $\widetilde{d} \in \mathcal{Z}^1(L^1(G), \mathbb{E}^*)$. Como $\mathcal{H}^1(L^1(G), \mathbb{E}^*) = \{0\}$ existe $\eta \in \mathbb{E}^*$ tal que $\widetilde{d} = \mathrm{ad}_\eta$. Sea $\tilde{n} = \eta \circ p : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$, o sea $\tilde{n} \in L^\infty(G)^*$. Sean $m = n - \tilde{n}$, $\phi \in L^\infty(G)$ y $f \in L^1(G)$ tal que $f \geq 0$ c.t.p y $\|f\|_1 = 1$ entonces

$$\begin{aligned}\langle f \cdot \phi - \phi \cdot f, m\rangle &= \langle \phi, m \cdot f - f \cdot m\rangle \\ &= \langle \phi, (n - \tilde{n}) \cdot f - f \cdot (n - \tilde{n})\rangle \\ &= \langle \phi, -d(f) + f \cdot \tilde{n} - \tilde{n} \cdot f\rangle \\ &= -\left\langle p(\phi), \widetilde{d}(f)\right\rangle + \langle p(\phi), ad_\eta(f)\rangle = 0\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\langle f * \phi, m\rangle = \langle f \cdot \phi, m\rangle = \langle \phi \cdot f, m\rangle = \langle \phi, m\rangle$$

porque $\|f\|_1 = 1$. Dada $a \in G$ entonces $f * \delta_a \in L^1(G)$ es no negativa c.t.p. y $\|f * \delta_a\|_1 = 1$. En consecuencia

$$\langle \delta_a * \phi, m\rangle = \langle f * (\delta_a * \phi), m\rangle = \langle (f * \delta_a) * \phi, m\rangle = \langle \phi, m\rangle, \tag{4.47}$$

o sea $m$ es invariante a izquierda. Finalmente, usando la notación del Lema 4.2.48, sea $\mu_m$ la única medida compleja sobre $\mathcal{H}(L^\infty(G))$ que realiza a $m$ como funcional lineal acotado sobre $L^\infty(G)$. Como

$$\|\mu_m\| \geq |\mu_m(\mathcal{H}(L^\infty(G)))| = \int_{\mathcal{H}} d\mu_m = m(1) = 1$$

entonces $\mu_m$ es no nula. Sea $p \in L^\infty(G)^*$ única tal que $\mu(p) = |\mu_m| / \|\mu_m\|$. Entonces $\|p\| = 1$ pues $\mu$ es isométrica. Además

$$p(1) = \int_{\mathcal{H}(L^\infty(G))} h(1)\, d\mu_p(h) = \int_{\mathcal{H}(L^\infty(G))} d\frac{|\mu_m|}{\|\mu_m\|}(h) = 1.$$

Como $\mu_m << |\mu_m|$, por el Teorema de Radon-Nikodyn existe una única $U_m \in L^1(|\mu_m|)$ tal que $d\mu_m = U_m\, d|\mu_m|$ y $|U_m(h)| = 1$, salvo quizás para valores $h$'$s$ en algún subconjunto de $|\mu_m|$ −medida nula (cf. [34], Th. 6.12, p. 133). Si $a \in G$, $\phi \in L^\infty(G)$, vale 4.47 entonces

$$\int_{\mathcal{H}(L^\infty(G))} h(\delta_a * \phi)\, d\mu_m(h) = \int_{\mathcal{H}(L^\infty(G))} h(\phi)\, d\mu_m(h)$$

i.e.

$$\int_{\mathcal{H}(L^\infty(G))} h(\delta_a * U_m(h)\ \phi)\, d|\mu_m|(h) = \int_{\mathcal{H}(L^\infty(G))} h(U_m(h)\ \phi)\, d|\mu_m|(h)$$

y podemos concluir que $|\mu_m|$ es invariante a izquierda, o bien que $\langle \delta_a * \phi, p\rangle = \langle \phi, p\rangle$ para cualquier $a \in G, \phi \in L^\infty(G)$. □

# Ejemplos de álgebras de Banach amenables

En gran medida la teoría de amenabilidad ha sido concebida, como ya hemos señalado, para dar teoremas de estructura de derivaciones o de operadores multilineales con coeficientes en módulos de Banach. En algunos casos específicos, como por ejemplo en $C^*-$álgebras, se sabe que toda derivación es automáticamente continua (cf. [28], Th. 2.3.1, p. 22). Más aún toda derivación sobre un álgebra semisimple es necesariamente continua (cf. [20]). Hay algunos resultados notables, tanto por su profundidad como por la simplicidad de sus demostraciones. Por ejemplo, si $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach, $\delta$ es una derivación acotada sobre $\mathfrak{A}$ y $\delta^2(a) = 0$ para cierto $a \in \mathfrak{A}$ entonces $\delta(a)$ tiene radio espectral nulo (cf.[25], [32]). Este resultado permite dar una demostración elemental, en el caso de álgebras de Banach unitarias $\mathfrak{A}$, de la no existencia de elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tales que $a \cdot b - b \cdot a = 1$ (cf. [38], [39]). Esta conclusión está en la base de la teoría de la física cuántica iniciada en 1924 por Heisenberg y Scrödinger. Por otra parte es remarcable que, en el caso de álgebras abelianas, toda derivación acotada tiene su imagen contenida en el radical (cf. [31]). Se dan algunos resultados inesperados, por ejemplo el álgebra $C^\infty[0,1]$ no admite estructura de álgebra de Banach (cf. [30]). En general no se han logrado aún resultados satisfactorios respecto a la descripción y propiedades de derivaciones en álgebras de operadores. Por ello es ciertamente muy apropiado el punto de vista adoptado en la teoría de amenabilidad, aún considerando las limitaciones teóricas todavía no superadas. Sin embargo, permite el logro de resultados que dan una comprensión más acabada de la estructura de clases de álgebras, superando el análisis de álgebras en particular.

Pasamos revista a continuación a algunos ejemplos, en una lista necesariamente incompleta, en la que podemos señalar algunas aplicaciones de la teoría de amenabilidad, apenas introducida.

## El álgebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$

Sea $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ el álgebra de Banach de matrices $n \times n$ con coeficientes complejos. Sea $\{e_{j,k} : j, k = 1, ..., n\}$ el conjunto de matrices canónicas unitarias de $\mathfrak{U}$ y veamos que posee una diagonal virtual. Para ello definimos $m \triangleq \frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n} e_{j,k}\otimes e_{k,j}$ en $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}\hookrightarrow(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A})^{**}$ sabemos que $\pi^{**}\mid\mathfrak{A}=\pi$. Por lo tanto tenemos que

$$\pi(m)=\frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n}\pi(e_{j,k}\otimes e_{k,j})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}n\cdot e_{j,j}=E_n.$$

Así obtenemos que $a\cdot\pi(m)=a$ para cualquier $a\in\mathfrak{A}$. Luego para $m,l\in\{1,...,n\}$ tenemos que

$$e_{l,m}\cdot m=\frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n}e_{l,m}\cdot e_{j,k}\otimes e_{k,j}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e_{l,j}\otimes e_{j,l}=\frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n}e_{j,k}\otimes e_{k,j}\cdot e_{l,m}=m\cdot e_{l,m}$$

Luego se sigue que $a\cdot m=m\cdot a$ para cualquier $a\in\mathfrak{A}$ y así $m$ resulta una diagonal virtual de $\mathbb{M}_n$.

# Amenabilidad de grupos finitos

Si $G$ es un grupo finito entonces $l^{\infty}(G)=\mathbb{C}^{G}$. Haciendo

$$m:l^{\infty}(G)\to\mathbb{C},\ \langle\phi,m\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\phi(g)$$

es inmediato que $m$ es un promedio invariante.

# Amenabilidad de grupos abelianos

La amenabilidad de grupos abelianos puede deducirse usando el siguiente teorema de Kakutani-Markov

**Teorema 4.2.50.** *(cf. [23], [26]) Si $K$ es un subconjunto compacto no vacío de un espacio localmente convexo $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{F}$ es una familia abeliana de funciones continuas afines de $K$ en $K$ entonces existe $x_0\in K$ tal que $f(x_0)=x_0$ para toda $f\in K$.*

Notar la similitud formal de los teoremas de Day y de Markov-Kakutani, ambos de punto fijo. Más específicamente, si $G$ fuere un grupo localmente compacto y abeliano, sea $K$ el conjunto de todos los promedios sobre $L^{\infty}(G)$. $K$ es convexo y compacto en $L^{\infty}(G)^{*}$ . Si $g\in G$ definimos

$$T_g:L^{\infty}(G)^{*}\to L^{\infty}(G)^{*},\ \langle T_g n,\phi\rangle=\langle\delta_g*\phi,n\rangle,$$

donde $\phi\in L^{\infty}(G)$ y $n\in L^{\infty}(G)^{*}$. Cada aplicación $T_g$ es $w^{*}-$continua y $T_g(K)\subseteq K$. Más aún, es inmediato que $T_{g\cdot h}=T_g\circ T_h$ para cualquier $g,\ h\in G$. Por el teorema de Kakutani-Markov existe $m\in K$ tal que $T_g m=m$ para cualquier $g\in G$. Así $m$ es un promedio invariante a izquierda sobre $L^{\infty}(G)$.

# Amenabilidad de $l^1(G)$

Si $G$ es un grupo, definimos

$$\mathfrak{A} = l^1(G) = \left\{ f \in \mathbb{C} : \|f\| = \sum_{r\in G} |f(r)| < \infty \right\},$$

siendo $\mathfrak{A}$ un espacio de Banach. Si ahora definimos para cualquier $t \in G$ y $f, g \in \mathfrak{U}$ el producto $(f * g)(t) = \sum\limits_{r.s=t} f(r)\, g(s)$ entonces $f * g$ está bien definida y $\mathfrak{A}$ deviene un álgebra de Banach unitaria, donde la unidad es $e_{\mathfrak{A}} = \delta_e$, siendo $e$ el elemento neutro de $G$ y $e_{\mathfrak{A}}(t) = 0$ si $t \neq e$ y $e_{\mathfrak{A}}(t) = 1$ si $t = e$. Veremos que $\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A} \approx l^1(G\times G)$. Sea $\Lambda : \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A} \to l^1(G\times G)$ tal que $\Lambda(f\otimes g)(s,t) = f(s)\cdot g(t)$ si $(s,t) \in G\times G$ y $f, g \in \mathfrak{A}$. Fijadas $f, g \in \mathfrak{A}$,

$$\|\Lambda(f\otimes g)\| = \sum_{s,t\in G} |f(s)\cdot g(t)| = \|f\|\,\|g\| < \infty$$

i.e. $\Lambda(f\otimes g) \in l^1(G\times G)$. En particular, $\|\Lambda(f\otimes g)\| = \|f\otimes g\|_{\omega}$. Si $u = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i$, con $f_i, g_i \in \mathfrak{A}$, entonces obtenemos que

$$\|\Lambda u\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i \otimes g_i\|_{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|\,\|g_i\|,$$

o bien, $\|\Lambda u\| \leq \|u\|_{\omega}$. La existencia de una aplicación lineal $\Lambda : \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A} \to l^1(G\times G)$ tal que verifique $\Lambda(f\otimes g)(s,t) = f(s)\cdot g(t)$ se sigue porque la aplicación $B : \mathfrak{A}\times\mathfrak{A} \to l^1(G\times G)$ tal que $B(f,g)(s,t) = f(s)\cdot g(t)$ para $f, g \in \mathfrak{A}$ y $s, t \in G$ es bilineal y además verifica que $\|B(f,g)\| \leq \|f\|\,\|g\|$. Así existe entonces la aplicación $\Lambda : \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A} \to l^1(G\times G)$ tal que $\Lambda(f\otimes g) = B(f,g)$ con $f, g \in \mathfrak{A}$. Sabemos que $\Lambda$ es acotada y $\|\Lambda u\| \leq \|u\|_{\omega}$ si $u \in \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}$. Sea ahora $\Gamma : l^1(G\times G) \to \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}$ tal que

$$\Gamma\left( \sum_{(a,b)\in G\times G} \alpha(a,b)\, \delta_{(a,b)} \right) = \sum_{(a,b)\in G\times G} \alpha(a,b)\, \delta_a \otimes \delta_b$$

Como $\|\delta_a \otimes \delta_b\|_{\omega} = \|\delta_a\|\,\|\delta_b\| = 1$ entonces $\Gamma$ está bien definida. Además,

$$\Lambda\Gamma(\alpha) = \Lambda\left( \sum_{(a,b)\in G\times G} \alpha(a,b)\, \delta_a \otimes \delta_b \right) = \sum_{(a,b)\in G\times G} \alpha(a,b)\, \delta_{(a,b)} = \alpha$$

Por otro lado, si $u=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i$ en $\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\Gamma\Lambda(u) &= \Gamma \sum_{i=1}^{n} B(f_i, g_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{(a,b)\in G\times G} B(f_i, g_i)(a,b)\, \delta_a \otimes \delta_b \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{(a,b)\in G\times G} f_i(a)\ \ g_i(b)\, \delta_a \otimes \delta_b = u
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos que $\Gamma = \Lambda^{-1}$. Además

$$
\|\Gamma(\alpha)\|_\omega \leq \sum_{(a,b)\in G\times G} |\alpha(a,b)| = \|\alpha\|_{l^i(G\times G)}\,.
$$

Concluimos así que $\Lambda$ es un isomorfismo isométrico, pues si $u \in \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}$ tenemos

$$
\|u\|_\omega = \|\Gamma\Lambda u\|_\omega \leq \|\Lambda u\| \leq \|u\|_\omega\,.
$$

Así $\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A} \approx \mathfrak{l}^1(G\times G)$ y por lo tanto, también es válido $\left(\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}\right)^* \approx l^\infty(G\times G)\,.$

Veremos que $l^1(G)$ es álgebra de Banach amenable si y solo si $G$ es grupo amenable. Asumamos que $\mathfrak{A}=l^1(G)$ es amenable. Sea $\pi : \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ lineal y acotada tal que si $f, g \in \mathfrak{A}$ entonces $\pi(f\otimes g) = f * g$ . Así tenemos que $\pi^* : l^\infty(G) \to \left(\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}\right)^*$ y $\pi^*\left(1_{l^\infty(G)}\right) \in \left(\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}\right)^*$. Si $f, g \in \mathfrak{A}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left\langle f\otimes g, \pi^*\left(1_{l^\infty(G)}\right)\right\rangle &= \left\langle \pi(f\otimes g), 1_{l^\infty(G)}\right\rangle \\
&= \left\langle f * g, 1_{l^\infty(G)}\right\rangle \\
&= \sum_{a\in G} (f*g)(a) \\
&= \sum_{a\in G}\sum_{b.c=a} f(b)\ \ g(c) \\
&= \sum_{a\in G}\sum_{b\in G} f(b)\ \ g\left(b^{-1}a\right) \\
&= \sum_{b\in G} f(b) \sum_{a\in G} g\left(b^{-1}a\right) \\
&= \left\langle f, 1_{l^\infty(G)}\right\rangle\ \ \left\langle g, 1_{l^\infty(G)}\right\rangle = \left\langle f\otimes g, 1_{l^\infty(G)}\otimes 1_{l^\infty(G)}\right\rangle
\end{aligned}
$$

i.e. $\pi^*\left(1_{l^\infty(G)}\right) = 1_{l^\infty(G)}\otimes 1_{l^\infty(G)}$ en $\left(\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}\right)^*$. Definimos ahora $m(\phi) = \left\langle 1_{l^\infty(G)}\otimes\phi, M\right\rangle$ con $\phi \in l^\infty(G)$. Es claro que $m$ está bien definido, es lineal, acotado y además

$$
m\left(1_{l^\infty(G)}\right) = \left\langle \pi^*\left(1_{l^\infty(G)}\right), M\right\rangle = \left\langle 1_{l^\infty(G)}, \pi^{**}(M)\right\rangle = \left\langle 1_{l^\infty(G)}, e_{\delta_e}\right\rangle = \left\langle \delta_e, 1_{l^\infty(G)}\right\rangle = 1
$$

y también $m$ verifica

$$\begin{aligned}\langle \phi\delta_a, m\rangle &= \left\langle 1_{l^\infty(G)} \otimes (\phi\delta_a), M\right\rangle \\ &= \left\langle \left(1_{l^\infty(G)} \otimes \phi\right)\delta_a, M\right\rangle \\ &= \left\langle 1_{l^\infty(G)} \otimes \phi, \delta_a M\right\rangle \\ &= \left\langle 1_{l^\infty(G)} \otimes \phi, M\delta_a\right\rangle \\ &= \left\langle \delta_a\left(1_{l^\infty(G)} \otimes \phi\right), M\right\rangle = \left\langle \left(\delta_a \cdot 1_{l^\infty(G)}\right) \otimes \phi, M\right\rangle.\end{aligned}$$

Pero si $f \in l^1(G)$ se tiene

$$\begin{aligned}\left\langle f, \delta_a \cdot 1_{l^\infty(G)}\right\rangle &= \left\langle f * \delta_a, 1_{l^\infty(G)}\right\rangle \\ &= \sum_{b\in G} (f * \delta_a)(b) \\ &= \sum_{b\in G}\sum_{c.d=b} f(c)\ \delta_a(d) \\ &= \sum_{b\in G} f\left(b\cdot a^{-1}\right) \\ &= \sum_{c\in G} f(c) = \left\langle f, 1_{l^\infty(G)}\right\rangle,\end{aligned}$$

o sea $\delta_a \cdot 1_{l^\infty(G)} = 1_{l^\infty(G)}$. Finalmente, tenemos que

$$\langle \phi\delta_a, m\rangle = \left\langle \left(\delta_a \cdot 1_{l^\infty(G)}\right) \otimes \phi, M\right\rangle = \left\langle 1_{l^\infty(G)} \otimes \phi, M\right\rangle = m(\phi)$$

i.e. $m(\phi\delta_a) = m(\phi)$, y así concluimos que $m$ es un promedio invariante a izquierda. Recíprocamente, asumamos que $m$ es un promedio invariante a izquierda sobre $l^\infty(G)$ y veamos que existe $M \in \left(\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}\right)^{**}$ tal que $\pi^{**}(M) = e_A$ y $a \cdot M = M \cdot a$ si $a \in l^1(G)$. Dada $F \in l^\infty(G \times G)$ definimos para cualquier $t \in G$ una aplicación en $l^\infty(G)$ dada por $\widetilde{F}(t) = F(t, t^{-1})$ y podemos definir un elemento $M \in \left(\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}\right)^{**} = (l^\infty(G \times G))^*$ haciendo $\langle F, M\rangle = \left\langle \widetilde{F}, m\right\rangle$. Evidentemente $M$ está bien definida, es lineal y

$$|\langle F, M\rangle| = \left|\left\langle \widetilde{F}, m\right\rangle\right| \leq \left\|\widetilde{F}\right\|_{l^\infty(G)} \|m\| \leq \|F\|_{l^\infty(G\times G)}$$

Ahora, si $s \in G$ y $f, g \in \mathfrak{A}$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle F \cdot \delta_s, f \otimes g\rangle &= \langle F, \delta_s(f \otimes g)\rangle = \langle F, (s \cdot f) \otimes g\rangle, \\ \langle \delta_s \cdot F, f \otimes g\rangle &= \langle F, (f \otimes g)\delta_s\rangle = \langle F, f \otimes (g \cdot s)\rangle\end{aligned}$$

o bien, $(F \cdot \delta_s)(u, v) = F(s \cdot u, v)$ y $(\delta_s \cdot F)(u, v) = F(u, v \cdot s)$. Luego son válidas las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned}
\widetilde{F\cdot\delta_s}(t) &= F\cdot\delta_s\left(t,t^{-1}\right) = F\left(s\cdot t,t^{-1}\right),\\
\widetilde{\delta_s\cdot F}(t) &= \delta_s\cdot F\left(t,t^{-1}\right) = F\left(t,t^{-1}\cdot s\right),\\
\widetilde{\delta_s\cdot F}(s.t) &= \delta_s\cdot F\left(s\cdot t,(s\cdot t)^{-1}\right)\\
&= \delta_s\cdot F\left(s\cdot t,t^{-1}\cdot s^{-1}\right)\\
&= F\left(s\cdot t,t^{-1}\cdot s^{-1}\cdot s\right)\\
&= F\left(s\cdot t,t^{-1}\right)\\
&= F\cdot\delta_s\left(t,t^{-1}\right) = \widetilde{F\cdot\delta_s}(t),
\end{aligned}$$

i.e.$\left(\widetilde{\delta_s\cdot F}\right)\cdot\delta_s = \widetilde{F\cdot\delta_s}$ para cualquier $s\in G$.Luego,

$$\begin{aligned}
\langle F,M\cdot\delta_s\rangle &= \langle\delta_s\cdot F,M\rangle\\
&= \left\langle\widetilde{\delta_s\cdot F},m\right\rangle\\
&= \left\langle\widetilde{\delta_s\cdot F},\delta_s\cdot m\right\rangle\\
&= \left\langle\widetilde{\delta_s\cdot F}\cdot\delta_s,m\right\rangle\\
&= \left\langle\widetilde{F\cdot\delta_s},m\right\rangle = \langle F,\delta_s\cdot M\rangle
\end{aligned}$$

y entonces $M\cdot\delta_s=\delta\cdot M$ si $s\in G$. Por otro lado, si $\theta\in l^\infty(G)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle\theta,\pi^{**}(M)\rangle &= \langle\pi^*(\theta),M\rangle\\
&= \left\langle\widetilde{\theta\pi\Gamma},m\right\rangle\\
&= \langle\theta(\delta_e),m\rangle\\
&= \langle\theta_e,m\rangle\\
&= \langle\theta_e\cdot 1,m\rangle\\
&= \theta_e\langle 1,m\rangle\\
&= \theta_e\\
&= \langle\theta,e_{\mathfrak{A}}\rangle
\end{aligned}$$

Así $M$ verifica que $\pi^{**}(M)=e_{\mathfrak{A}}$ y también $M\cdot\delta_s=\delta_s\cdot M$ para cualquier $s\in G$. Por lo tanto, $M$ es diagonal virtual de $\left(\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A}\right)^{**}$.

## Sobre promedios invariantes en $l^\infty(\mathbb{Z})$

En general no siempre es posible exhibir promedios invariantes. En este ejemplo, aunque hacemos uso de un resultado de compacidad, podemos intuir la forma de un promedio invariante sobre $l^\infty(\mathbb{Z})$. A tal efecto, si $n \geq 1$ sea $m^{(n)} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \delta_j$ en $l^1(\mathbb{Z})$. Así $\left\| m^{(n)} \right\|_1 = 1$. Como $l^1(\mathbb{Z}) \hookrightarrow l^\infty(\mathbb{Z})^*$, pasando eventualmente a una subsucesión, existe $m \in l^\infty(\mathbb{Z})^*$ tal que $m = w^* - \lim_n m^{(n)}$. Sean $\phi \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $r \in \mathbb{N}$ y suponemos $n > r$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left\langle \phi, \delta_r \cdot m^{(n)} \right\rangle &= \left\langle \delta_r \cdot \phi, m^{(n)} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \phi(j-r) \\
&= \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n-r}^{n-r} \phi(k) \\
&= \frac{1}{2n+1} \left( \sum_{j=-n-r}^{-n+r-1} \phi(k) + \sum_{j=-n+r}^{n-r} \phi(k) \right) \\
&= \frac{1}{2(n-r)+1} \sum_{j=-n+r}^{n-r} \phi(k) \frac{2(n-r)+1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n-r}^{-n+r-1} \phi(k)
\end{aligned}
$$

En consecuencia

$$\lim_{n \to \infty} \left\langle \phi, \delta_r \cdot m^{(n)} \right\rangle = \langle \phi, \delta_r \cdot m \rangle = \langle \phi, m \rangle .$$

## Sobre las álgebras de Lebesgue $l^p(\mathbb{Z})$, $1 < p < \infty$.

Dados $a, b \in l^p(\mathbb{Z})$ sea $a \cdot b = \{a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Veamos $l^p(\mathbb{Z})$ deviene entonces en un álgebra de Banach. Evidentemente, basta demostrar que $\|a \cdot b\|_p \leq 1$ si $\|a\|_p \leq 1$ y $\|b\|_p \leq 1$. En efecto, si $q \in \mathbb{R}$ es tal que $1/p + 1/q = 1$, dado un subconjunto finito $F$ de $\mathbb{Z}$ podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\sum_{n \in F} |a_n \cdot b_n|^p &= \sum_{n \in F} |a_n|^p \ \ |b_n|^p \\
&\leq \left( \sum_{n \in F} |a_n|^{p^2} \right)^{1/p} \left( \sum_{n \in F} |b_n|^{p \cdot q} \right)^{1/q} \\
&\leq \left( \sum_{n \in F} |a_n|^{p} \right)^{1/p} \left( \sum_{n \in F} |b_n|^{p + q} \right)^{1/q} \\
&\leq \|a\|_p \left( \sum_{n \in F} |b_n|^{p} \right)^{1/q} \\
&\leq \|a\|_p \ \ \|b\|_p^{p/q} \leq 1,
\end{aligned}
$$

de donde es inmediata la afirmación.

Veamos que estas álgebras no son amenables. Bastará ver que cualquier aproximación de la unidad es no acotada. En efecto, sea $R = \{e_a\}_{a\in A}$ una aproximación acotada de la unidad de $l^p(\mathbb{Z})$. Fijado $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$ sea $f_F = \sum_{n\in F} e_n$. Como $\lim_{a\in A} (e_a \cdot f_F) = f_F$ existe $a_F \in A$ tal que $\|e_a \cdot f_F - f_F\|_p < 1/2$ si $a \geq a_F$. Luego, si $a \geq a_F$ y $m \in F$ tenemos

$$|e_a(m) - 1| \leq \left(\sum_{n\in F} |1 - e_a(n)|^p\right)^{1/p} \leq \|e_a \cdot f_F - f_F\|_p < 1/2.$$

Luego

$$\|e_{a_F}\|_p^p \geq \sum_{n\in F} |e_{a_F}(n)|^p + \sum_{n\notin F} |e_{a_F}(n)|^p \geq \sharp F/2^p,$$

de donde sigue la conclusión.

# Álgebras C-amenables

Si $C \geq 1$ y $\mathfrak{U}$ es un álgebra de Banach, diremos que $\mathfrak{U}$ es $C-$**amenable** si tiene una diagonal aproximada acotada por $C$.

## El álgebra $\mathcal{B}(l_n^p)$

Sea $\mathcal{B}(l_n^p)$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de endomorfismos lineales sobre $\mathbb{C}^n$, munida de la estructura natural de álgebra de Banach inducida por $\left(\mathbb{C}^n, \|\circ\|_p\right)$. Si $B = \{e_j\}_{j=1}^n$ es la base canónica de $l_n^p$ y $T \in \mathcal{B}(l_n^p)$ existen escalares únicos tal que $Te_j = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_{ij} \cdot e_i$ con $1 \leq j \leq n$. Si definimos $\Lambda(T) = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\Lambda : \mathcal{B}(l_n^p) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ es un isomorfismo algebraico. Dado $\sigma \in S_n$ indiquemos $A_\sigma$ a la matriz de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ cuya $j$-ésima fila es $e_{\sigma_j}$, $1 \leq j \leq n$. Si $\{e_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n}$ es el conjunto de matrices canónicas en $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tenemos

$$A_\sigma = \sum_{1\leq i,j\leq n} \delta_{\sigma i,j} \cdot e_{i,j} = \{\delta_{\sigma_i,j}\}_{i,j=1}^n = \sum_{i=1}^n e_{i,\sigma_j}.$$

Si $\epsilon \in \{-1,1\}^n$, o sea si $\epsilon$ es cualquier n-upla con $\pm 1\'s$ en sus coordenadas, indiquemos $D_\epsilon = \sum\limits_{j=1}^n \epsilon_j e_{j,j}$.. Entonces

$$(A_\sigma D_\epsilon)_{r,s} = \sum_{i=1}^n (e_{i,\sigma_i} D_\epsilon)_{r,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n \delta_{i,\sigma_i}^{r,t} \; (D_\epsilon)_{t,s} = \delta_{\sigma(r)}^s \epsilon_s.$$

Luego,

$$A_\sigma D_\epsilon = \sum_{r,s}^{n} \delta^s_{\sigma(r)}\ \epsilon_s e_{r,s} = \sum_{s=1}^{n} \epsilon_s\ e_{\sigma^{-1}(s),s}. \tag{4.48}$$

Análogamente,

$$D_\epsilon A_\sigma = \sum_r \epsilon_r\ e_{r,\sigma(r)} = \sum_s \epsilon_{\sigma^{-1}s}\ e_{\sigma^{-1}(s),s}. \tag{4.49}$$

Escribamos $\sigma(\epsilon) = (\epsilon_{\sigma(1)}, ..., \epsilon_{\sigma(n)})$ en $\{-1,1\}^n$. De (4.48) y (4.49),

$$A_\sigma D_\epsilon = D_{\sigma^{-1}(\epsilon)} A_\sigma. \tag{4.50}$$

Escribiremos

$$G = \{D_\epsilon A_\sigma : \sigma \in S_n,\ \epsilon \in \{-1,1\}^n\}, \tag{4.51}$$

y veremos que $G$ es un subgrupo irreducible de matrices de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})$, i.e. contiene un conjunto de generadores de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. En particular, es evidente que $G$ es finito. Dado que

$$\begin{aligned}(D_{\epsilon_1}\ A_{\sigma_1})(D_{\epsilon_2}\ A_{\sigma_2}) &= D_{\epsilon_1}(A_{\sigma_1}\ D_{\epsilon_2})A_{\sigma_2} &(4.52)\\ &= D_{\epsilon_1}\left(D_{\sigma_1^{-1}(\epsilon_2)}\ A_{\sigma_1}\right)A_{\sigma_2} = D_{\epsilon_1\sigma_1^{-1}(\epsilon_2)}\ A_{\sigma_1\circ\sigma_2} &(4.53)\end{aligned}$$

entonces $G$ es cerrado por productos. Hemos usado que $D_{\epsilon_1} \cdot D_{\epsilon_2} = D_{\epsilon_1.\epsilon_2}$ donde

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \{\epsilon_1(1)\cdot\epsilon_2(1), ..., \epsilon_1(n)\cdot\epsilon_2(n)\} \in \{-1,1\}^n$$

y que $A_{\sigma_1}A_{\sigma_2} = A_{\sigma_1\circ\sigma_2}$, donde $\sigma_1 \circ \sigma_2$ es el producto de $S_n$. Además $I = D_{1,...,1}A_{(1,...,n)}$ es la matriz idéntica $(D_\epsilon\ A_\sigma)^{-1} = A_{\sigma^{-1}}\ D_\epsilon$, pues

$$\begin{aligned}&(A_{\sigma^{-1}}\ D_\epsilon)(D_\epsilon\ A_\sigma) = A_{\sigma^{-1}}\ A_\sigma = A_{(1,...,n)} = I,\\ &(D_\epsilon\ A_\sigma)(A_{\sigma^{-1}}\ D_\epsilon) = D_\epsilon(A_\sigma\ A_{\sigma^{-1}})D_\epsilon = D_\epsilon D_\epsilon = I\end{aligned}$$

y por (4.50) $A_{\sigma^{-1}}D_\epsilon \in G$. El producto es asociativo como sigue enseguida de (4.52). $G$ es **grupo irreducible**, i.e. contiene un sistema lineal de generadores de $\mathbb{M}_n$. En efecto, sean $\epsilon, \acute{\epsilon} \in \{-1,1\}^n$ tal que $\epsilon(i) = -\acute{\epsilon}(i)$ si $i \neq r$ y $\epsilon(r) = -\acute{\epsilon}(r)$ con $1 \leq i, r \leq n$. Si $\sigma \in S_n$ entonces $D_\epsilon A_\sigma + D_{\acute{\epsilon}} A_\sigma = 2e_{r,\sigma(r)}$ como $\sigma$ y $r$ son arbitrarios, $e_{r,s} \in \mathrm{gen}_{\mathbb{C}}(G)$. Sea ahora $m = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} g \otimes g^{-1}$ en $\mathbb{M}_n \widehat{\otimes} \mathbb{M}_n$. Si $\pi : \mathbb{M}_n \widehat{\otimes} \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ tal que $\pi(x \otimes y) = xy$ con $x, y \in \mathbb{M}_n$. Evidentemente $\pi(m) = \mathrm{Id}_{\mathbb{M}_n}$. Además si $h \in G$ tenemos

$$h \cdot m = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(h\cdot g)\otimes g^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(h\cdot g)\otimes(h\cdot g)^{-1}h = m\cdot h$$

Como $\mathbb{M}_n$ es la cápsula lineal generada por $G$ sigue que $a \cdot m = m \cdot a$ si $a \in \mathbb{M}_n$ y $m$ es diagonal virtual de $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$, o sea $\mathcal{B}(l_n^p)$ es $1-$amenable.

## Sobre uniones de álgebras C-amenables

Sean $C \geq 1$, $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach y $(\mathfrak{U}_\alpha)_\alpha$ una familia de subálgebras de $\mathfrak{U}$, cerradas, $C-$amenables tal que $\bigcup_\alpha \mathfrak{U}_\alpha$ es densa en $\mathfrak{U}$. Entonces $\mathfrak{U}$ es $C-$amenable. En efecto, sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos finitos de $\bigcup_\alpha \mathfrak{U}_\alpha$. Sean $F \in \mathcal{F}$ y $\epsilon > 0$. Elegimos $\mathfrak{U}_\alpha$ tal que $F \subset \mathfrak{U}_\alpha$. Dado que $\mathfrak{U}_\alpha$ es $C-$amenable, existe $m_{F,\epsilon} \in \mathfrak{U}_\alpha \widehat{\otimes} \mathfrak{U}_\alpha$ con $\|m_{F,\epsilon}\| \leq C$ tal que verifica $\|a \cdot m_{F,\epsilon} - m_{F,\epsilon} \cdot a\| < \epsilon$ y además $\|a \cdot \pi m_{F,\epsilon} - a\| < \epsilon$ para $a \in F$. Así se sigue que $(m_{F,\epsilon})_{F\in\mathcal{F},\, \epsilon>0}$ es una diagonal aproximada para $\mathfrak{U}$ acotada por $C$.

**Observación 4.2.51.** Notemos que $\mathbb{C}^n$, munido de la estructura de álgebra de Banach definida mediante $a \cdot b = (a_1 \cdot b_1, ..., a_n \cdot b_n)$ para $a, b \in \mathbb{C}^n$, es amenable. En efecto, sea $M = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$. Entonces $M \in \left(\mathbb{C}^n \widehat{\otimes} \mathbb{C}^n\right)^{**}$ y si $a \in \mathbb{C}^n$ tenemos

$$a \cdot M = \sum_{i=1}^n a \cdot (e_i \otimes e_i) = \sum_{i=1}^n (a_i \cdot e_i) \otimes e_i = \sum_{i=1}^n e_i \otimes (a_i \cdot e_i) = M \cdot a.$$

Además

$$\pi(M) = \sum_{i=1}^n \pi(e_i \otimes e_i) = \sum_{i=1}^n e_i = 1_{\mathbb{C}^n}.$$

Observemos que $\mathbb{C}^n \hookrightarrow l^2(\mathbb{N})$, que $l^2(\mathbb{N}) \hookrightarrow l^2(\mathbb{Z})$ ya que las proyecciones son funcionales acotados, y que $\cup_{n=1}^\infty \mathbb{C}^n$ es denso en $l^2(\mathbb{N})$. $l^2(\mathbb{N})$ es un álgebra de Banach no amenable, como puede verse razonando como en (I).

# Sobre condiciones suficientes de amenabilidad

A continuación esbozaremos una importante construcción mediante la cual se ha podido establecer la amenabilidad de algunas álgebras de operadores (cf. [10]). Diremos que un **sistema biortogonal finito** para un espacio de Banach $\mathbb{E}$ es un conjunto de la forma $\mathcal{S} = \left\{ \left(x_j, x_j^*\right) : j, k = 1, ...n \right\}$ con $x_1, ..., x_n \in \mathbb{E}$ y $x_1^*, ..., x_n^* \in \mathbb{E}^*$ tal que $\langle x_j, \phi_k \rangle = \delta_{j,k}$, con $j, k = 1, ..., n$. Entonces es posible definir homomorfismos

$$\theta : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{E}), \theta(A) = \sum_{1\leq j,k\leq n} a_{j,k} x_j \odot x_k^*,$$

donde $\mathcal{F}(\mathbb{E})$ indica al álgebra de operadores lineales acotados de rango finito sobre $\mathbb{E}$, $A = (a_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$ en $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ y $(x \odot x^*)(y) = x^*(y)x$ para $x, y \in \mathbb{E}$ y $x^* \in \mathbb{E}^*$. Un espacio de Banach $\mathbb{E}$ tiene la **Propiedad** $\mathbb{A}$ si posee una red de sistemas biortogonales finitos $\{\mathcal{S}_\lambda\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $\mathbb{E}$, de modo que los correspondientes homomorfismos $\theta_\lambda : \mathbb{M}_{n_\lambda}(\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{E})$ verifican las siguientes propiedades:

**(i)** $\text{lím}_{\lambda\in\Lambda}\, \theta_\lambda\left(\mathrm{E}_{n_\lambda}\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{E}$,

**(ii)** $\text{lím}_{\lambda\in\Lambda}\, \theta_\lambda\left(\mathrm{E}_{n_\lambda}\right)^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^*}$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{E}^*$,

**(iii)** *Para cada índice $\lambda$ hay un grupo irreducible $G_\lambda$ de matrices $n_\lambda \times n_\lambda$ de modo que $\widehat{\sigma} \triangleq \sup_{\lambda\in\Lambda} \sup_{g\in G_\lambda} \|\theta_\lambda(g)\| < \infty$.*

## Amenabilidad de $\mathcal{A}(\mathbb{E})$

**Teorema 4.2.52.** *Supongamos que $\mathbb{E}$ tiene la propiedad $\mathbb{A}$. Entonces el álgebra $\mathcal{A}(\mathbb{E})$ de operadores aproximables sobre $\mathbb{E}$ es amenable.*

*Demostración.* Sea $\{\mathcal{S}_\lambda\}_{\alpha\in\Lambda}$ una red de sistemas biortogonales finitos de $\mathbb{E}$ en las condiciones anteriores. Para $\lambda \in \Lambda$ sea $d_\lambda = \frac{1}{|G_\lambda|} \sum\limits_{g\in G_\lambda} \theta_\lambda(g) \widehat{\otimes} \theta_\lambda(g^{-1})$. Veamos que la red $\{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $\mathcal{A}(\mathbb{E}) \widehat{\otimes} \mathcal{A}(\mathbb{E})$ es una diagonal aproximada de $\mathcal{A}(\mathbb{E})$. La misma deviene acotada por la condición (iii). Sea $\pi : \mathcal{A}(\mathbb{E}) \widehat{\otimes} \mathcal{A}(\mathbb{E}) \to \mathcal{A}(\mathbb{E})$ el único operador lineal acotado tal que $\pi(S \otimes T) = S \circ T$ para cada $S, T \in \mathcal{A}(\mathbb{E})$. Escribiremos

$$P_\lambda = \pi(d_\lambda) = \theta_\lambda(E_{n_\lambda}) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} x_{i,\lambda} \odot x_{i,\lambda}^*,\ \lambda \in \Lambda.$$

En particular, $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ deviene acotado en $\mathcal{A}(\mathbb{E})$. Dados $x \in \mathbb{E}$, $x^* \in \mathbb{E}^*$ resulta

$$\|P_\lambda(x \odot x^*) - x \odot x^*\| = \sup_{\|y\|=1} \left\| x^*(y) \left( \sum_{i=1}^{n_\lambda} x_{i,\lambda}^*(x)\, x_{i,\lambda} - x \right) \right\| \leq \|x^*\| \, \|P_\lambda x - x\|,$$

y por (i) deducimos que $\text{lím}_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(x \odot x^*) = x \odot x^*$. Como $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es acotada y $\mathcal{F}(\mathbb{E})$ es denso en $\mathcal{A}(\mathbb{E})$ entonces $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es aproximación acotada a derecha de la unidad en $\mathcal{A}(\mathbb{E})$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\|x \odot x^* - P_\lambda \cdot (x \odot x^*) \cdot P_\lambda\| &= \|x \odot x^* - P_\lambda(x) \odot P_\lambda^*(x^*)\| \\
&= \|(x - P_\lambda(x)) \odot x^* + P_\lambda(x) \odot (x^* - P_\lambda^*(x^*))\| \\
&\leq \|x - P_\lambda(x)\| \, \|x^*\| + \|P_\lambda(x)\| \, \|x^* - P_\lambda^*(x^*)\|,
\end{aligned}$$

y por (i) y (ii) obtenemos que $\text{lím}_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \cdot (x \odot x^*) \cdot P_\lambda = x \odot x^*$. Inferimos como antes que $\text{lím}_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \cdot T \cdot P_\lambda = T$ para todo $T \in \mathcal{A}(\mathbb{E})$. Puesto que

$$T \cdot d_\lambda - d_\lambda \cdot T = (T - P_\lambda \circ T \circ P_\lambda) \cdot d_\lambda - d_\lambda \cdot (T - P_\lambda \circ T \circ P_\lambda) + P_\lambda \circ T \circ P_\lambda \cdot d_\lambda - d_\lambda \cdot P_\lambda \circ T \circ P_\lambda$$

obtenemos que

$$\overline{\text{lím}}_{\lambda\in\Lambda} \|T \cdot d_\lambda - d_\lambda \cdot T\| \leq 2 \sup_{\lambda\in\Lambda} \|d_\lambda\| \lim_{\lambda\in\Lambda} \|T - P_\lambda \circ T \circ P_\lambda\|,$$

de donde sigue la afirmación. $\square$

## Amenabilidad de $\mathcal{A}\left(L^p\left(\Omega,\Sigma,\mu\right)\right)$

Sea $(\Omega, S, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in (1,\infty)$. Consideramos

$$\mathfrak{T} = \left\{\tau = \left\{A_1, ..., A_{n_\tau}\right\} : \tau \subseteq \Sigma, \tau \text{ es disjunta y } \mu\left(A_j\right) \in (0,\infty)\ \forall A_j \in \tau\right\}.$$

Si $\tau_1, \tau_2 \in \tau$ escribiremos $\tau_1 \leq \tau_2$ si y solo si cada elemento de $\tau_1$ es unión de una subfamilia de $\tau_2$. Para cada $\tau \in \tau$ tenemos el correspondiente sistema biortogonal finito

$$\beta_\tau = \left\{\left(\frac{1}{\mu\left(A\right)^{1/p}}\chi_A, \frac{1}{\mu\left(B\right)^{1/q}}\chi_B\right) : A, B \in \tau\right\},$$

donde $q \in (1,\infty)$ es tal que $1/p + 1/q = 1$. Sea $\theta_\tau : \mathbb{M}_{n_\tau}\left(\mathbb{C}\right) \to \mathcal{A}\left(L^p\left(\Omega,\Sigma,\mu\right)\right)$ el correspondiente homomorfismo. En particular,

$$\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right) = \sum_{A\in\tau}(\chi_A \otimes \chi_A)/\mu\left(A\right).$$

Dado $K \in \Sigma$ tal que $\{K\} \leq \tau$ tenemos

$$\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)\chi_K = \sum_{A\in\tau:A\cap K\neq\varnothing}\frac{1}{\mu\left(A\right)}\int\limits_A \chi_k\, d\mu\chi_A = \sum_{A\in\tau:A\subseteq K}\frac{\mu\left(A\cap K\right)}{\mu\left(A\right)}\chi_A = \chi_K.$$

En particular, $\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)^* : (L^p)^* = L^q \to L^q$ y $\chi_K \in L^q$ porque $\mu\left(K\right) < \infty$. Así

$$\begin{aligned}
\left\langle f, \theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)^*\chi_K\right\rangle &= \left\langle f, \chi_K \circ \theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)\ f, \chi_K\right\rangle \\
&= \int\limits_K \sum_{A\in\tau}\frac{1}{\mu\left(A\right)}\int\limits_A f\, d\mu\, \chi_A\, d\mu \\
&= \sum_{A\in\tau}\frac{1}{\mu\left(A\right)}\int\limits_A f\, d\mu \int\limits_{K\cap A} d\mu \\
&= \sum_{A\in\tau:A\subseteq K}\int\limits_A f\, d\mu \\
&= \int\limits_K f\, d\mu = \left\langle f, \chi_K\right\rangle,
\end{aligned}$$

i.e. $\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)^*\chi_K = \chi_K$. Análogamente, para cualquier función simple $s$ es válido que $\lim_{\tau\in\tau}\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)(s) = s$. Por último, dados $f \in L^p, \epsilon > 0$ sea $s$ una función simple tal que $\|f - s\|_p \leq \epsilon/(\widehat{\sigma} + 1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)(f) - f\right\|_p &\leq \left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)(f - s)\right\|_p + \left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)(s) - s\right\|_p + \|s - f\|_p \\
&\leq \left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)\right\| \|f - s\|_p + \left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)(s) - s\right\|_p + \|s - f\|_p \\
&\leq \left(\left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)\right\| + 1\right)\|s - f\|_p + \left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)(s) - s\right\|_p \\
&\leq \left(\widehat{\sigma} + 1\right)\|s - f\|_p + \left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)(s) - s\right\|_p,
\end{aligned}$$

de donde

$$\overline{\lim_{\tau\in\tau}}\left\|\theta_\tau\left(E_{n_\tau}\right)(f)-f\right\|_p\leq\left(\widehat{\sigma}+1\right)\left\|s-f\right\|_p\leq\epsilon.$$

Así vemos que $\mathfrak{T}$ satisface (i) de la Propiedad $\mathbb{A}$, verificándose la condición (ii) en forma análoga. Dado $\tau\in\mathfrak{T}$ sea $\mathcal{G}_\tau$ el grupo irreducible finito de matrices definido en (4.51). Para $\sigma\in S_{n_\tau}$, $\epsilon\in\{-1,1\}^{n_\tau}$ y $\tau=\{A_1,...,A_{n_\tau}\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\theta_\tau\left(D_\epsilon A_\sigma\right)(f)\right\|_p&=\left\|\sum_{j=1}^{n_\tau}\left(\frac{\epsilon_j}{\mu\left(A_j\right)^{1/p}}\int\limits_{A_j}f\;d\mu\right)\frac{1}{\mu\left(A_{\sigma(j)}\right)^{1/q}}\,\chi_{A_{\sigma(j)}}\right\|_p\\&=\left(\sum_{j=1}^{n_\tau}\frac{1}{\mu\left(A_j\right)^{p/q}}\left|\int\limits_{A_j}f\;d\mu\right|^p\right)^{1/p}\\&\leq\left(\sum_{j=1}^{n_\tau}\frac{1}{\mu\left(A_j\right)^{p/q}}\;\mu\left(A_j\right)^{p/q}\int\limits_{A_j}\left|f\right|^p\;d\mu\right)^{1/p}\\&=\left(\sum_{j=1}^{n_\tau}\int\limits_{A_j}\left|f\right|^p\;d\mu\right)^{1/p}\quad=\left\|f\right\|_p,\end{aligned}$$

i.e. $\widehat{\sigma}=\sup_{\tau\in\mathfrak{T}}\sup_{g\in\mathcal{G}_\tau}\left\|\theta_\tau\left(g\right)\right\|\leq1$, i.e. el espacio $L^p\left(\Omega,\Sigma,\mu\right)$ tiene la Propiedad $\mathbb{A}$ y por el Teorema 4.2.52 concluimos que $\mathcal{A}\left(L^p\left(\Omega,S,u\right)\right)$ es $1-$amenable.

## Amenabilidad de grupos compactos

Supongamos entonces que $G$ es grupo compacto. Entonces la medida de Haar está naturalmente normalizada (cf. [5], Th. 11.4, p. 155), de modo que si $\phi\in L^\infty\left(G\right)$ se tiene

$$\int\limits_G\left|\phi\left(a\right)\right|dm_G\left(a\right)\leq\left\|\phi\right\|_\infty<\infty,$$

o bien $L^{\infty}(G) \subseteq L^{1}(G)$. Sea entonces $m : L^{\infty}(G) \to \mathbb{C}$ tal que $\langle \phi, m \rangle = \int\limits_{G} \phi(a)\, dm_{G}(a)$. Si $c \in G$ escribimos

$$\begin{aligned}
\langle \delta_c * \phi, m \rangle &= \int\limits_{G} (\delta_c * \phi)(a)\ dm_G(a) \\
&= \int\limits_{G} \int\limits_{G} \phi\left(b^{-1}a\right)\ d\delta_c(b)\ dm_G(a) \\
&= \int\limits_{G} \int\limits_{G} \phi\left(b^{-1}a\right)\ dm_G(a)\ d\delta_c(b) \\
&= \int\limits_{G} \int\limits_{G} \phi(a)\ dm_G(a)\ d\delta_c(b) \\
&= \langle \phi, m \rangle \int\limits_{G} d\delta_c(b) \\
&= \langle \phi, m \rangle\ \ \langle 1_G, \delta_c \rangle = \langle \phi, m \rangle,
\end{aligned}$$

i.e. $m$ es invariante a izquierda. Además $m \in (L^{\infty}(G))^{*}$ y $\|m\| \leq 1$. Como $\langle 1_G, m \rangle = 1$ entonces $m$ es un promedio invariante a izquierda sobre $G$.

# Una propiedad hereditaria

La amenabilidad es un concepto rico en propiedades hereditarias, no obstante lo cual las mismas deben establecerse con suficiente recaudo. Nos limitamos a señalar la siguiente: Si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son álgebras de Banach unitarias y $\theta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es un homomorfismo continuo tal que $\overline{\theta(\mathfrak{A})} = \mathfrak{B}$ y que $\theta(e_{\mathfrak{U}}) = e_{\mathfrak{B}}$. Si $\mathfrak{A}$ es amenable entonces $\mathfrak{B}$ lo es. En efecto, como el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A} & \xrightarrow{\theta \otimes \theta} & \mathfrak{B}\widehat{\otimes}\mathfrak{B} \\
\downarrow \pi_{\mathfrak{A}} & & \downarrow \pi_{B} \\
\mathfrak{A} & \xrightarrow{\theta} & \mathfrak{B}
\end{array}$$

entonces $\pi_{\mathfrak{B}}^{**}\,(\theta \otimes \theta)^{**} = \theta^{**}\,\pi_{\mathfrak{A}}^{**}$. Si $M$ es diagonal virtual de $\mathfrak{A}$, sea $N = (\theta \otimes \theta)^{**}(M)$. Entonces

$$\pi_{\mathfrak{B}}^{**}(N) = \pi_{\mathfrak{B}}^{**}\,(\theta \otimes \theta)^{**}(M) = \theta^{**}\,\pi_{\mathfrak{A}}^{**}(M) = \theta^{**}(e_{\mathfrak{A}}) = e_{\mathfrak{B}}.$$

Sean $u \in (\mathfrak{B}\widehat{\otimes}\mathfrak{B})^{*}$, $b \in \mathfrak{B}$ y $\{a_n\} \subseteq \mathfrak{A}$ tales que $\theta(a_n) \to b$. Como $u \cdot b = \lim_n u \cdot \theta(a_n)$ en $(\mathfrak{B}\widehat{\otimes}\mathfrak{B})^{*}$ entonces

$$\langle u, b \cdot N \rangle = \langle u \cdot b, N \rangle = \lim_{n} \langle u \cdot \theta(a_n), (\theta \otimes \theta)^{**}(M) \rangle = \lim_{n} \langle (\theta \otimes \theta)^{*}(u \cdot \theta(a_n)), M \rangle$$

Así si $a_n \in \mathfrak{A}$ tenemos que $(\theta \otimes \theta)^* (u \cdot \theta (a_n)) \in (\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{A})^*$. Además si $a_1,\ a_2 \in \mathfrak{A}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(\theta \otimes \theta)^* (u \cdot \theta (a)) (a_1 \otimes a_2) &= (u \cdot \theta (a)) (\theta (a_1) \otimes \theta (a_2)) \\
&= u (\theta (a \cdot a_1) \otimes \theta (a_2)) \\
&= u ((\theta \otimes \theta) ((a \cdot a_1) \otimes a_2)) \\
&= u ((\theta \otimes \theta) (a (a_1 \otimes a_2))) \\
&= ((\theta \otimes \theta)^* u) (a (a_1 \otimes a_2)) = (((\theta \otimes \theta)^* u) a) (a_1 \otimes a_2),
\end{aligned}$$

de donde $(\theta\otimes\theta)^* (u \cdot \theta (a)) = ((\theta \otimes \theta)^* u) a$. Asimismo, $(\theta\otimes\theta)^* (u (\theta (a))) = ((\theta \otimes \theta)^* u) a$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\langle u, b \cdot N \rangle &= \lim_n \langle (\theta \otimes \theta)^* (u \cdot \theta (a_n)), M \rangle \\
&= \lim_n \langle ((\theta \otimes \theta)^* u) a_n, M \rangle \\
&= \lim_n \langle (\theta \otimes \theta)^* u, a_n \cdot M \rangle \\
&= \lim_n \langle (\theta \otimes \theta)^* u, M \cdot a_n \rangle \\
&= \lim_n \langle a_n ((\theta \otimes \theta)^* u), M \rangle \\
&= \lim_n \langle (\theta \otimes \theta)^* (\theta (a_n) u), M \rangle \\
&= \lim_n \langle \theta (a_n) u, (\theta \otimes \theta)^{**} M \rangle \\
&= \lim_n \langle \theta (a_n) u, N \rangle = \langle b \cdot u, N \rangle = \langle u, N \cdot b \rangle
\end{aligned}$$

Así tenemos que $\pi_{\mathfrak{B}}^{**} (N) = e_{\mathfrak{B}}$ y $b \cdot N = N \cdot b$, entonces $N$ es diagonal virtual de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}$ resulta amenable.

## Amenabilidad de ciertas álgebras uniformes

Sean $\Omega$ un espacio compacto Hausdorff, $C(\Omega)$ el álgebra de Banach usual de funciones continuas sobre $\Omega$. Si $G = \{\exp(if) : f \in C_{\mathbb{R}}(\Omega)\}$, $G$ resulta amenable ya que es grupo abeliano, i.e. $l^1(G)$ es amenable. Sea $\theta : l^1(G) \to C(\Omega)$ dada por $\theta (\alpha) = \sum_{h\in G} \alpha_h e^{ih}$. Entonces $\theta$ es homomorfismo continuo de álgebras. Si $\mathfrak{A} = \theta (l^1(G))$, $\mathfrak{A}$ es una subálgebra de $C(\Omega)$. Además $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathfrak{A}$, pues si $z \in \mathbb{C}$, $z = \theta (z\delta_1)$ con $\delta_1(g) = 1$ si $g = 1$ en $G$ y $\delta_1(g) = 0$ si $g \neq 1$ en $G$. Además $\overline{\theta (\alpha)} = \sum_{h\in G} \overline{\alpha_h}\, e^{-ih} = \sum_{h\in G} \overline{\alpha_{-h}}\, e^{ih} = \theta (\alpha^*)$, donde $\alpha^*(h) = \overline{\alpha (-h)}$ con $h \in G$, i.e. $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}^*$. Además $\mathfrak{A}$ separa puntos de $\Omega$, y por el Teorema de Stone-Weierstrass sigue que $\mathfrak{A}$ es densa en $C(\Omega)$. La amenabilidad de $C(\Omega)$ sigue entonces de (I).

## El álgebra sobre el disco cerrado unitario de $\mathbb{C}$

Sea $\mathcal{A}(D)$ el conjunto de funciones continuas en el disco unitario cerrado $\overline{D}$ que son analíticas en su interior $D$. Dados $x, y \in \mathcal{A}(D)$ y $\varsigma \in D$, escribimos

$$(x * y)(\varsigma) = \varsigma \int_0^1 x(\varsigma - t\varsigma)\ y(t\varsigma)\ dt$$

Entonces $(\mathcal{A}(D), \|\circ\|_\infty, *)$ es una subálgebra de Banach sin unidad de $C_{\mathbb{C}}(\overline{D})$. Veamos que $\mathcal{A}(D)$ no es amenable. En efecto, $\mathbb{C}$ es un $\mathcal{A}-$bimódulo de Banach como sigue definiendo $\lambda \cdot f = f \cdot \lambda = \lambda \cdot f(0)$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{A}$. Sea $Df = f^{(1)}(0)$ para $f \in \mathcal{A}(D)$. Así $D \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ y es evidente que $\mathcal{N}^1(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = \{0\}$ y $\mathbb{C}$ es un módulo dual, de donde sigue la afirmación.

## Álgebras débilmente amenables

Es el caso de las álgebras de Banach abelianas y semisimples, como sigue del ya mencionado teorema de Singer & Wermer (cf. [31]).

# Bibliografía


[1] P. Aiena, H. G. Dales, J. Eschmeier, K. Laursen & G. Willis: *Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis.* London Mathematical Society Student Texts **57.** Cambridge University Press, Cambridge, (2003**).**

[2] S. Banach & A. Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parts respectivement congruents.* Fund. Math., **6**, 244-277, (1924).

[3] H. Cartan & S. Eilenberg: *Homological algebra.* Princeton University Press, Princeton, (1956).

[4] P. J. Cohen: *Factorization in group algebras.* Duke Math. J. Math., **26**, 199-205, (1959).

[5] J. B. Conway: *A course in functional analysis.* Springer-Verlag, N.Y., Berlin, Heidelberg, (1990).

[6] H. G. Dales, Ghahramani & A. Ya. Helemskii: *The amenability of de measure algebra.* J. London Math. Soc., (2), **66**, 213-226, (2002).

[7] M. M. Day: *Means on semigroups and groups.* Bull. Amer. Math. Soc., **55**, 1054-1055, (1949).

[8] R. G. Douglas: *Banach algebra techniques in operator theory.* Graduate Texts in Maths., **179**, Springer-Verlag, N. Y., (1998).

[9] M. Eshaghi Gordji, F. Habibian & A. Rejali: *Ideal amenability of module extension Banach algebras.* To appear in Int. J. Contemp. Math. Sciences, vol 2, no. 5, 213-219, (2007).

[10] N. Grønbæk, B. Johnson y G. A. Willis: *Amenability of Banach algebras of compact operators.* Israel J. Math., **87**, 289-324, (1994).

[11] A. Grothendieck: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc., **16**, (1955).

[12] U. Haagerup: *All nuclear $C^*-$algebras amenable. Invent. Math.,* **74**, 305-319, (1983).

[13] A. Haar: *Der Maßbegriff der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*. Ann. of Math., (2), **34**, 147-169, (1933).

[14] F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, (1914).

[15] A. Ya. Helemskii: *The homology of Banach and topological algebras.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1989).

[16] E. Hewitt & K. Ross: *Abstract harmonic analysis I.* Springer-Verlag. Berlín, Gottingen, Heidelberg, (1963).

[17] E. Hewitt & K. Ross: *Abstract harmonic analysis II.* Springer-Verlag. Berlín, Gottingen, Heidelberg, (1970).

[18] G. Hochschild: *On the cohomology groups of and associative algebra.* Ann. of Math., (2) **46**, 58-67, (1945).

[19] G. Hochschild: *On the cohomology theory for associative algebras.*Ann. of Math., (2) **47**, 568-579, (1946).

[20] B. Johnson & A. M. Sinclair: *Continuity of derivations and a problem of Kaplansky.* Amer. J. Math., **90**, 1067-1073, (1968).

[21] B. Johnson: *Cohomology in Banach algebras.* Memoirs of the AMS, vol. 127, (1972).

[22] R. V. Kadison & J. R. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras.* Graduate Studies in Maths., Vol. 15. AMS, Academis Press, USA, (1997).

[23] S. Kakutani: *Two fixed point theorems concerning bicompact convex sets.* Proc. Imp. Akad., Tokio, **14**, 242-245, (1938).

[24] J. L. Kelley: *Topología general.* EUDEBA, (1975).

[25] C. D. Kleinecke: *On operator commutators.* Proc. Amer. Math. Soc., **8**, p. 535-536, (1957).

[26] A. Markov: *Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens. Dokl. Akad. Nauk SSSR **10**, 311-314, (1936).*

[27] : C. E. Rickart: *General theory of Banach algebras.* D. Van Nostrand Co., (1960).

[28] S. Sakai: *Operator algebras in dynamical systems.* Cambridge University Press. (1991).

[29] R. Schatten: *A theory of cross-space.* Ann. Math. Studies, **26**. Princaton University Press, New Jersey, (1950).

[30] G. E. Šilov: *On a property of rings of functions.* Dokl. Akad. Nauk., SSSR, **58**, 985-988, (1947).

[31] I. Singer & J. Wermer: *Derivations on commutative normed algebras.* Math. Ann., **129**, 260-264, (1955).

[32] F. V. Sirokov: *Proof of a conjecture of Kaplansky.* Usephi. Math. Nauk., **11**, 167-168. (1956).

[33] V. Runde: *Lectures on Amenability.* Lecture Notes in Mathematics. University of Alberta, Canadá (2002).

[34] W. Rudin. *Real and complex analysis.* Mc-Hill Series in Higher Math., (1974).

[35] A. Tarski: *Algebraische Fassung des Maßproblems. Fund. Math,* **31**, 47-66, (1938).

[36] J. L. Taylor: *A general setting for a multi-operator functional calculus.* Advances in Math., **9**, 183-252, (1972).

[37] J. G. Wendel: *Left centralizers and isomorphisms of group algebras.* Pacific J. Math., **2**, 251-261, (1952).

[38] H. Wielandt: *Über der unbeschränktheit der operatoren der Quantum Mechanik.* Math. Ann., **121**, 21, (1949).

[39] A. Wintner: *The unboundedness of quantum mechanical matrices.* Phys. Rev., 71 (**2**), 737-739, (1947).