Retículos distributivos con negación

Bruno, Franco David

Director: Dr. Sergio Celani

Departamento de Matemáticas
NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a mi director, Sergio Celani, su gran disponibilidad, calidez y afecto personal, un referente como matemático a seguir.

Agradecer también al apoyo incondicional a mi padres, su aliento y paciencia a lo largo de mi carrera.

Introducción

En la primera mitad del siglo XIX, el intento de George Boole de formalizar la lógica proposicional llevó al concepto de *álgebra de Boole*. Al investigar la axiomatización de las álgebras Boole al final del Siglo XIX, Charles S. Peirce y Ernst Schroder encontraron útil introducir el concepto de retículo. Independientemente, la investigación de Richard Dedekind sobre ideales de números algebraicos llevó al mismo concepto; de hecho, Dedekind también introdujo la modularidad, una forma debilitada de distributividad. Aunque algunos de los primeros resultados de estos matemáticos y de Edward V. Huntington son muy elegantes y lejos de ser triviales, no lograron atraer la atención de la comunidad matemática.

No fue hasta el trabajo de Garrett Birkhoff a mediados de los treinta que inició el desarrollo de la teoría de retículos. En una brillante serie de papers demostró la importancia de la teoría de retículos y que proporciona un marco unificador para desarrollos en muchas disciplinas matemáticas. El propio Birkhoff, Valere Glivenko, Karl Menger, John Von Neumann, Oystein Ore, y otros habían desarrollado suficientemente este nuevo campo para que Birkhoff intentara ”venderlo” a la comunidad matemática, lo que hizo con éxito en la primera edición de su famoso libro ”Teoría del retículos” [3].

La teoría de retículos tiene un fuerte impacto en muchas ramas de la matemática. En particular en el tratamiento algebraico de la lógica. En lógica clásica, y por lo tanto en su interpretación algebraica: las álgebras de Boole, la operación de negación juega un papel fundamental. Intuitivamente, la negación clásica de una proposición es verdadera cuando dicha proposición es falsa, y viceversa.

En un álgebra de Boole $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ la negación se interpreta como una función $\neg : B \to B$ tal que satisface las siguientes condiciones:

(C1) $\neg 0 = 1$ y $\neg 1 = 0$,

(C2) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$,

(C3) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$, (C4) $\neg\neg a = a$ (Principio de la doble negación),

(C5) $\neg a \vee a = 1$ (Principio del tercero excluído),

(C6) $\neg a \wedge a = 0$ (Principio de explosión).

La condición (C1) indica que la negación de la verdad es el valor falso, y recíprocamente. Las condiciones (C2) y (C3) son las clásicas leyes de De Morgan. Estas leyes proporcionan una forma de dualidad: la negación sobre la disyunción inclusiva equivale a la conjunción de negaciones, y recíprocamente, la negación de la conjunción es igual a la unión de las negaciones de las disyunciones inclusivas. La condición (C4) es la interpretación algebraica de la ley de doble negación: la negación de la negación de una proposición p, es lógicamente equivalente a p.

Las condiciones (C1) a (C6) corresponden a la interpretación algebraica de la negación clásica. Pero la lógica clásica no es la única lógica donde aparece algún tipo de negación, por ejemplo, en la *lógica intuicionista* existe una negación que no cumple todas las propiedades anteriores. La lógica intuicionista, también conocida como lógica constructivista, es un sistema lógico originalmente desarrollado por Arend Heyting para proveer una base formal al proyecto intuicionista de Brouwer. El intuicionismo rechaza el principio del tercero excluido (C5), pero conserva el principio de explosión (C6). Otra diferencia radica en el principio de doble negación. En lógica intuicionista, una proposición implica su doble negación, pero no al revés.

De igual forma en que la lógica clásica se interpreta algebraicamente por medio de las álgebras de Boole, la lógica intuicionista se interpreta algebraicamente por medio de la clase de los retículos distributivos acotados dotados de una operación binaria llamada implicación intuicionista. Estas álgebras son conocidas como *álgebras de Heyting*. En un álgebra de Heyting $\langle L, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ la negación intuicionista $\neg$ se puede definir por medio de la ecuación $\neg a = a \rightarrow 0$. Esta negación cumple las propiedades (C1), (C2) y (C6). Las restantes propiedades (C3), (C4) y (C5), no son generalmente válidas en las álgebras de Heyting. Es más, se puede probar que un álgebra de Heyting es un álgebra de Boole si y sólo si es válida la propiedad de doble negación (C4). En cambio, si exigimos que un álgebra de Hetying satisfaga el principio (C3) no obtenemos necesariamente un álgebra de Boole.

Existen otras estructuras algebraicas con operaciones unarias que satisfacen algunas de las propiedades de la negación. Por ejemplo, otra clase de álgebras con una negación son las *álgebras de De Morgan*. Un álgebra de De Morgan es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ donde $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y $\sim\colon L \rightarrow L$ es una función unaria que satisface las propiedades (C1), (C2) y (C3).

Esta clase de álgebras son parte de muchas estructuras algebraicas importantes como las *MV-álgebras* y las *álgebras de Heyting simétricas*.

En general una *negación* en un retículo distributivo es una operación unaria que revierte el orden de la estructura algebraica que estamos considerando y que puede transformar ínfimos en supremos y supremos en ínfimos. Ya que hay muchas propiedades similares en las negaciones de las estructuras algebraicas mencionadas es necesario estudiar retículos distributivos con una operación unaria que tenga las propiedades *mínimas* que una negación debería tener. El objetivo principal de este trabajo es estudiar en profundidad los retículos distributivos acotados con negación, o $\neg$-retículos, que satisfacen las propiedades:

(N1) $\neg 0 = 1$,

(N2) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

La negación que estudiaremos es una negación que podríamos decir cercana a la operación del pseudocomplemento, ya que las propiedades (N1) y (N2) se satisfacen en todo retículo pseudocomplementado. Podríamos estudiar una *negación dual*, en el sentido de la negación del último elemento es el primer elemento del retículo, y la negación del ínfimo de dos elementos se transforma en el supremo de la negación de cada elemento. Ambas definiciones son en cierto sentido duales entre sí, pero no interdefinibles.

Descripción de los capítulos

Capítulo 1. En este capítulo presentaremos algunos conceptos necesarios para desarrollar la teoría que nos concierne. Cuenta con tres secciones: la primera consiste en introducir el concepto de conjunto ordenado. En la segunda sección definimos a los retículos como estructuras algebraicas. La tercer sección esta dedicada a recordar el concepto de filtro de un retículo y sus propiedades, y como subsección presentamos uno de los resultados más importantes de la teoría de retículos distributivos, el Teorema del Filtro Primo, y además contiene un importante teorema de representación de Stone para los retículos distributivos acotados. Por último, introducimos algunos coceptos algebraicos básicos como el de congruencia de un retículo, álgebras subdirectamente irreducibles y suma ordinal de retículos.

Capítulo 2. En este capítulo, dividido en cinco secciones, introducimos el concepto central de retículo con negación o $\neg$-retículo, y desarrollamos una dualidad topológica junto con algunas aplicaciones. La primer sección se definen a los $\neg$-retículos, con una gran suma de ejemplos de gran relevancia. Luego, hacia el final de la sección, definimos unas estructuras algebraicas denominadas marcos, el cual juegan un papel muy importante. En la segunda sección mostramos un primer teorema de representación para los $\neg$-retículos. Luego, en la tercer sección y la más importante, desarrollaremos la dualidad de Priestley para los $\neg$-retículos. Se presentan los espacio duales y un último teorema de representación. Por último, en las dos últimas secciones, se caracterizan a las congruencias, y a las subálgebras.

Capítulo 3. En este capítulo estudiamos en profundidad a las álgebras pseudocomplementadas, que son un caso particular de $\neg$-retículos. El capítulo en cuestión se encuentra dividido en cinco secciones. En la primer sección se describen numerosas identidades y propiedades. También se muestran cómo estas álgebras forman una clase ecuacional y se describen a las álgebras subdirectamente irreducibles. En la segunda sección vemos dos subconjuntos de gran importancia: el conjunto de los elementos densos y el conjunto de elementos regulares. Estos conjuntos permiten caracterizar a las álgebras de Stone como veremos en el próximo capítulo. En la tercer sección se describen a todas las subclases ecuacionales de álgebras, donde se encuentran, en particular, a las álgebras de Boole y las álgebras de Stone. Además, una importante caracterización a través de filtos primos maximales para cada subclase ecuacional. En la cuarta sección vemos algunos resultados y caracterizaciones por medio de condiciones de primer orden definidas en el $\neg$-marco asociado al $\neg$-retículo. Y en la última sección, desarrollamos una dualidad topológica para este caso particular de álgebras de negación. También describimos las congruencias.

Capítulo 4. Este capítulo está dedicado exclusivamente a tratar las álgebras de Stone y consta de tres secciones. En la primera se ven ejemplos particulares y algunas caracterizaciones donde intervienen los conjuntos densos y conjunto regulares. En la segunda sección, introducimos el concepto de álgebras de Stone relativas, donde, además las caracterizamos por medio de los elementos densos. Por último, determinamos una dualidad para estas álgebras basándonos en la dualidad de álgebras pseudocomplemetadas desarrollada en el capítulo anterior.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es recordar y fijar la notación sobre algunos conceptos de teoría de retículos básicos que serán utilizados en los capítulos siguientes. La mayoría de los conceptos aquí introducidos pueden hallarse en [2], [5] y [10].

1.1. Conjuntos ordenados

Sea X un conjunto no vacío. Una relación binaria $\leq$ definida sobre X se dice que es un *orden* (u *orden parcial*) si satisface las siguientes propiedades:

1. $x \leq x$,
2. Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$,
3. Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

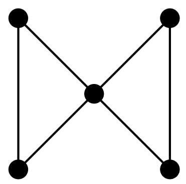
El par $\langle X, \leq \rangle$ se llama *conjunto ordenado*. Si se cumple además que para todo $x, y \in X$, $x \leq y$ o $y \leq x$, entonces $\langle X, \leq \rangle$ se llama *conjunto totalmente ordenado* o *cadena*.

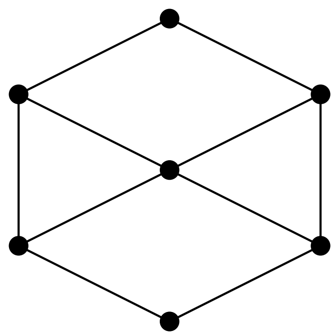
Ejemplo 1.1. Sean $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son ejemplos de conjuntos totalmente ordenados con el orden usual.

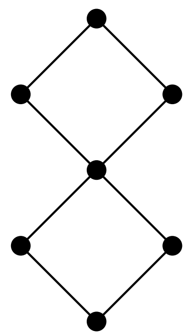
Ejemplo 1.2. Sea X un conjunto y $P(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X. Entonces $\langle P(X), \subseteq \rangle$ es un conjunto ordenado.

Ejemplo 1.3. Sea X un espacio topológico y sean $O(X)$, $C(X)$ y $Clop(X)$ las familias de todos los subconjuntos abiertos, cerrados y abiertos-cerrados de X, respectivamente. Entonces cualquiera de estas familias es un conjunto ordenado donde la relación de orden es la inclusión.

Observemos que dado un conjunto ordenado finito $\langle X, \leq \rangle$ es posible representarlo por medio de un diagrama de Hasse. En las siguientes figuras se dan varios ejemplos de conjuntos ordenados.







Definición 1.1. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto ordenado. Un subconjunto $Y \subseteq X$ se dice *creciente* si para todo $x \in X$ e $y \in Y$ tal que $y \leq x$, se tiene que $x \in Y$. Similarmente un subconjunto $Y \subseteq X$ es *decreciente* si para todo $x \in X$, y para todo $y \in Y$ tal que $x \leq y$, $x \in Y$.

Dado un conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$, la familia de todos los subconjuntos crecientes de X será simbolizado por $Up(X)$. Claramente $\langle Up(X), \subseteq \rangle$ también es un conjunto ordenado bajo la relación de inclusión.

Definición 1.2. Sean $\langle X, \leq \rangle$ e $\langle Y, \leq \rangle$ dos conjuntos ordenados. Una función $f : X \to Y$ es una *función creciente o monótona creciente* si preserva el orden, es decir, para todo $x, y \in X$, si $x \leq y$ implica que $f(x) \leq f(y)$.

Diremos que f es un *isomorfismo de orden* si

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Es sencillo comprobar que todo isomorfismo de orden es inyectivo. En efecto, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$ y $f(x_2) \leq f(x_1)$. Por ser isomorfismo de orden, $x_1 \leq x_2$ y $x_2 \leq x_2$, y luego $x_1 = x_2$.

Si existe un isomorfismo de orden f sobreyectivo entre los conjuntos ordenados X e Y, diremos simplemente que son *isomorfos* y lo denotaremos como $X \simeq Y$.

Uno de los temas principales de la teoría de estructuras ordenadas es determinar teoremas de representación por medio de conjuntos.

Teorema 1.3 (de Representación de Stone)**.** *Todo conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$ es isomorfo a una familia de subconjuntos ordenados por inclusión. Es decir, existe un conjunto Y no vacío y un subconjunto $D \subseteq P(Y)$ tal que*

$$\langle X, \leq \rangle \cong \langle D, \subseteq \rangle .$$

1.2. Retículos

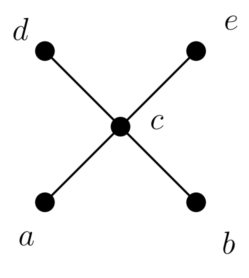
Dentro de la clase de todos los conjuntos ordenados hay ciertas clases que tienen propiedades muy importantes. Una de estas es la de los retículos.

Definición 1.4. Sea $\langle L, \leq \rangle$ un conjunto ordenado. Diremos que:

1. $\langle L, \leq \rangle$ es un *retículo* si para todo subconjunto finito existe el supremo e ínfimo.

2. $\langle L, \leq \rangle$ es un *retículo completo* si para todo subconjunto existe el supremo e ínfimo.

Ejemplo 1.4. Obviamente no todo conjunto ordenado es un retículo. El siguiente diagrama muestra un conjunto ordenado donde el supremo del subconjunto $\{d, e\}$ no existe y el ínfimo de $\{a, b\}$ tampoco.



Ejemplo 1.5. Todo conjunto totalmente ordenado es un retículo. Observemos que

$$x \vee y = \begin{cases} x & \text{si } y \leq x \\ y & \text{si } x \leq y \end{cases}, \qquad x \wedge y = \begin{cases} y & \text{si } y \leq x \\ x & \text{si } x \leq y \end{cases}.$$

Ejemplo 1.6. Si X es un conjunto no vacío, el conjunto ordenado $\langle P(X), \subseteq\rangle$ es un retículo donde el supremo e ínfimo son

$$A \vee B = A \cup B \qquad A \wedge B = A \cap B$$

para todo $A, B \in P(X)$.

Una propiedad importante de los retículos es que pueden ser definidos como estructuras algebraicas y juegan un papel importante dentro del álgebra universal. En un retículo $\langle L, \leq\rangle$ podemos definir dos operaciones binarias como sigue:

$$\vee : L \times L \to L \qquad \vee\,(a, b) = a \vee b,$$

$$\wedge : L \times L \to L \qquad \wedge\,(a, b) = a \wedge b.$$

Proposición 1.5. *Sea L un conjunto no vacío. Entonces $\langle L, \leq\rangle$ es un retículo si y sólo si L se lo puede dotar de dos operaciones binarias internas $\vee$ y $\wedge$, llamadas supremo e ínfimo, respectivamente, cumpliendo las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in L$:*

1. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)\,,$
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)\,,$
3. $a \vee b = b \vee a,$
4. $a \wedge b = b \wedge a,$
5. $a \vee a = a,$
6. $a \wedge a = a,$
7. $a \vee (a \wedge b) = a,$
8. $a \wedge (a \vee b) = a,$

con un orden parcial definido de la siguiente manera:

$$a \leq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

El retículo será denotado por $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ o simplemente L.

Definición 1.6. Un retículo $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ se dirá *acotado* si existen elementos $0, 1 \in L$ tal que se cumple lo siguiente:

1. Para todo $a \in L$, $a \wedge 0 = 0$,
2. para todo $a \in L$, $a \vee 1 = 1$.

Observemos que en todo retículo se cumple siempre la llamada *Propiedad de Klein* o *semi-distributividad*:

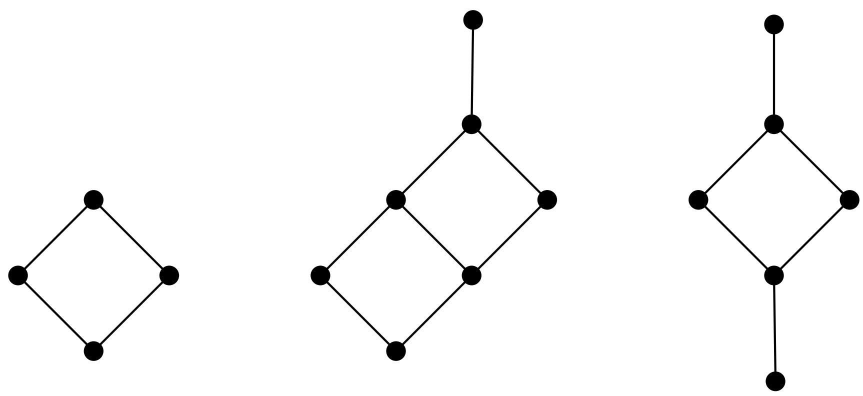
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)\,,$$

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)\,.$$

Si se cumple la igualdad se denomina *retículo distributivo*.

Ejemplo 1.7. Sea X un conjunto no vacío, entonces el retículo $\langle P(X), \cup, \cap, \emptyset, X\rangle$ es un retículo distributivo acotado.

Ejemplo 1.8. Cualquiera de los siguientes diagramas de Hasse define un retículo distributivo acotado.



1.2.1. Subretículos

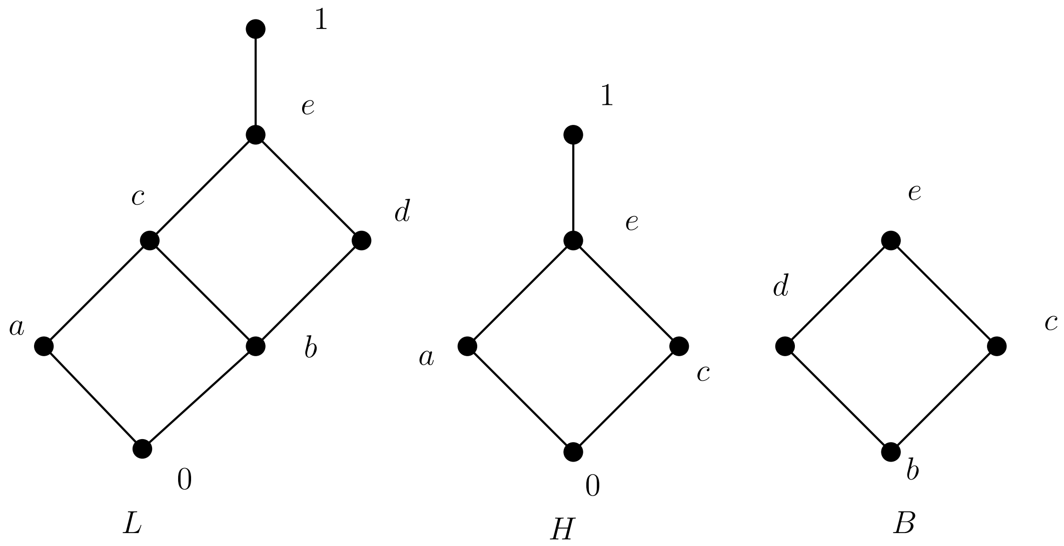
Conocidos son los conceptos de subgrupo, subanillo, subespacio vectorial, etc. Estas definiciones en realidad pueden darse dentro del alcance del álgebra universal. Para los retículo se puede definir una estructura similar.

Definición 1.7. Sea L un retículo y $H \subseteq L$. Decimo que H es un *subretículo* de L si para todo par de elementos $a, b \in H$,

$$a \wedge b \text{ y } a \vee b \in H.$$

Si L es acotado, entonces H es un *subretículo acotado*, o $(0, 1)$- *subretículo*, si es un subretículo tal que $0, 1 \in H$.

Ejemplo 1.9. Consideremos el retículo de la figura. Observemos que H es un $(0, 1)$-subretículo y que B es únicamente un subretículo pues no contiene a los elementos 0 y 1.



Ejemplo 1.10. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto ordenado. Entonces $\langle Up(X), \subseteq \rangle$ es un subretículo de $\langle P(X), \subseteq \rangle$.

Ejemplo 1.11. Sea L retículos. Entonces para cada $a, b \in L$, tal que $a \leq b$ el conjunto

$$[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$$

es un subretículo de L.

Ejemplo 1.12. En un espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$ los conjuntos $O(X), C(X)$ y $Clop(X)$ son subretículos de $\langle P(X), \cup, \cap \rangle$.

1.2.2. Homomorfismo

En cualquier estructura algebraica, como grupo o anillos, siempre existe una apropiada noción de función que preserva las operaciones de la estructura algebraica. Para los retículos podemos dar una nocion similar.

Definición 1.8. Sean L y H dos retículos. Un *homomorfismo* es una funcion $h : L \to H$ tal que:

1. $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$,

2. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$,

para cada $a, b \in L$. Si los retículos son acotados, entonces h es un $(0, 1)$-*homomorfismo* si es un homomorfismo tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$.

Diremos que h es un *isomorfismo* si es un homomorfismo inyectivo y sobreyectivo.

Proposición 1.9. *Sean L, H dos retículos. Si $h : L \to H$ es homomorfismo de retículos entonces h es monótona creciente, es decir,*

$$a \leq b \text{ , entonces } h(a) \leq h(b),$$

para todo $a, b \in L$. Además, h es un isomorfismo si y sólo si h es un isomorfismo de orden sobreyectivo.

1.3. Filtros

Definición 1.10. Sea L un retículo. Diremos que un subconjunto no vacío $F \subseteq L$ es un *filtro* de L si satisface las siguientes condiciones:

1. Si $x \in F$ y $x \leq y$, entonces $y \in F$,

2. Si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$.

Un filtro F es propio si $F \neq L$.

Definición 1.11. Sea L un retículo, un subconjunto no vacío $I \subseteq L$ es un *ideal* de L si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si $y \in I$ y $x \leq y$, entonces $x \in I$,

2. Si $x,\ y \in I$, entonces $x \vee y \in I$.

Un ideal es propio si $I \neq L$.

Observemos que un filtro de un retículo es un subconjunto no vacío, creciente y cerrado bajo $\wedge$. Análogamente, un ideal es un subconjunto no vacío, decreciente y cerrado bajo $\vee$. Vamos a simbolizar por $\langle Fi(L), \subseteq\rangle$ y $\langle Id(L), \subseteq\rangle$ los conjuntos ordenados por medio de la inclusión de los filtros y de los ideales de L, respectivamente.

Además, se puede ver que la intersección arbitraria entre filtro (ideales) es nuevamente un filtro (ideal), lo cual permite la siguiente definición de filtro generado e ideal generado.

Definición 1.12. Sea L un retículo y H un subconjunto de L no vacío. El *filtro generado* por H es

$$[H) = \bigcap\{F : H \subseteq F\}.$$

El ideal generado por H es

$$(H] = \bigcap\{I : H \subseteq I\}.$$

Daremos a continuación una caracterización de los filtros e ideales generados por un conjunto.

Proposición 1.13. *Sea L un retículo y H un subconjunto de L no vacío. Entonces:*

$$[H) = \{x \in L : \exists H_0 = \{h_0, ..., h_n\} \subseteq H \textit{ tal que } h_0 \wedge ... \wedge h_n \leq x\},$$

$$(H] = \{x \in L : \exists H_0 = \{h_0, ..., h_n\} \subseteq H \textit{ tal que } x \leq h_0 \vee ... \vee h_n\}.$$

Corolario 1.14. *Sea L un retículo, F un filtro, I un ideal y $a \in F$. Entonces:*

$$[F \cup \{a\}) = \{x \in L : \exists f \in F \textit{ tal que } f \wedge a \leq x\},$$

$$(I \cup \{a\}] = \{x \in L : \exists i \in I \textit{ tal que } x \leq i \vee a\}.$$

Teorema 1.15. *Sea L un retículo. Entonces:*

- $\langle \mathrm{Fi}(L), \subseteq\rangle$ *es un retículo completo donde las operaciones están definidas por:*

$$\bigwedge_{j \in J} F_j = \bigcap_{j \in J} F_j,$$
$$\bigvee_{j \in J} F_j = \left[\bigcup_{j \in J} F_j\right).$$

- $\langle \mathrm{Id}(L), \subseteq \rangle$ *es un retículo completo donde las operaciones están definidas por:*

$$\bigwedge_{j \in J} I_j = \bigcap_{j \in J} I_j,$$
$$\bigvee_{j \in J} I_j = \left(\bigcup_{j \in J} I_j \right].$$

Corolario 1.16. *Sea L un retículo distributivo acotado. Sea $Id(L)$ el conjunto ordenado de todos los ideales de L por medio de la inclusión, $\subseteq$. Si definimos el ínfimo y el supremo como el Teorema 1.15, entonces*

$$\langle Id(L), \veebar, \barwedge, \{0\}, L \rangle$$

es un retículo distributivo acotado.

Demostración. Probemos que $\langle Id(L), \veebar, \barwedge, \{0\}, L \rangle$ es distributivo. Sean I_1, I_2 e I_3 tres ideales, bastará probar que $(I_1 \veebar I_2) \barwedge I_3 \subseteq (I_1 \barwedge I_3) \veebar (I_2 \barwedge I_3)$. Sea $x \in (I_1 \veebar I_2) \barwedge I_3$. Entonces $x \in I_1 \veebar I_2$ y $x \in I_3$. Luego existe $z \in I_1 \cup I_2$ tal que $x \leq z$. Como los ideales son decrecientes, si $z \in I_1$ entonces $x \in I_1$, si $z \in I_2$ entonces $x \in I_2$. Como

$$x \in I_1 \subseteq I_1 \cup I_3 \subseteq (I_1 \cup I_3] \text{ o } x \in I_2 \subseteq I_2 \cup I_3 \subseteq (I_2 \cup I_3].$$

De esta forma obtenemos que $x \in (I_1 \cup I_3] \cup (I_2 \cup I_3]$. ■

Definición 1.17. Sea L un retículo.

1. Un filtro propio $F \subseteq L$ es *primo* si para cada $a, b \in L$ tal que $a \vee b \in F$, entonces $a \in F$ o $b \in F$,

2. Un filtro propio $F \subseteq L$ se dirá *maximal* o *ultrafiltro* si para $K \in \mathrm{Fi}(L)$ tal que $F \subseteq K$, entonces $F = K$ o $K = L$.

El conjunto ordenado de los filtros primos, y ultrafiltros de L será denotado con $X(L)$ y $\mathrm{Ul}(L)$, respectivamente.

Teorema 1.18. *Sea L un retículo distributivo. Entonces $Ul(L) \subseteq X(L)$, es decir, todo ultrafiltro es particularmente un filtro primo.*

1.3.1. Teorema del Filtro Primo

Ahora, daremos lugar a uno de los resultados más importantes de la teoría de retículos distributivos, el *Teorema del Filtro Primo*, también conocido como el Teorema del Ideal Primo o Teorema de Birkhoff-Stone. Este teorema tiene importantes implicaciones en la teoría de representación por medio de conjuntos y en representaciones topológicas de muchas estructuras algebraicas ordenadas con reducto de retículo distributivo. Esencialmente es un resultado sobre separación entre filtros e ideales. Necesitamos, a su vez, el conocido Lema de Zorn, resultado que es equivalente al axioma de elección, en el sentido de que cualquiera de ellos junto con los axiomas de Zermelo, es suficiente para probar el otro.

Lema 1.19 (Lema de Zorn)**.** *Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$. Supongamos que para toda cadena $\mathcal{C}$ en el conjunto ordenado $\langle \mathcal{F}, \subseteq \rangle$ se verifica que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal.*

Teorema 1.20 (del Filtro Primo)**.** *Sea L un retículo distributivo, $F \in \mathrm{Fi}(L)$ e $I \in \mathrm{Id}(L)$ tal que $F \cap I = \emptyset$. Entonces existe un filtro primo P tal que*

$$F \subseteq P \text{ y } P \cap I = \emptyset.$$

Demostración. Consideremos la siguiente familia de filtros

$$\mathcal{F} = \{H \in \mathrm{Fi}(L) : F \subseteq H \text{ y } H \cap I = \emptyset\}.$$

Puesto que $F \in \mathcal{F}$, la familia $\mathcal{F}$ es no vacía. Es sencillo comprobar que si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una cadena, entonces $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, por el Lema de Zorn existe un elemento maximal P en $\mathcal{F}$. Supongamos que existen $a, b \in L$ tales que $a \vee b \in P$, $a \notin P$ y $b \notin P$. Consideremos los filtros $F_a = [P \cup \{a\})$ y $F_b = [P \cup \{b\})$. Entonces $P \subset F_a \cap F_b$. Como P es maximal en $\mathcal{F}$, $F_a, F_b \notin \mathcal{F}$. Entonces existen $p_1, p_2 \in P$ y $x, y \in I$ tales que $p_1 \wedge a \leq x$ y $p_2 \wedge b \leq y$. De este modo, $p_1 \wedge p_2 \wedge (a \vee b) \leq x \vee y \in P$, y como I es un ideal, $x \vee y \in I$. Es decir, $x \vee y \in P \cap I$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a \in P$ o $b \in P$ y luego P es primo. ■

Corolario 1.21. *Sea L un retículo distributivo. Se satisfacen los siguientes puntos:*

1. *Si $F \in \mathrm{Fi}(L)$ y $a \notin F$, existe P filtro primo tal que $F \subseteq P$ y $a \notin P$.*
2. *Si $a \nleq b$, existe P filtro primo tal que $a \in P$ y $b \notin P$.*

3. *Todo filtro es intersección de filtros primos que lo contienen.*

Corolario 1.22. *Sea L un retículo que verifica que todo filtro propio es intersesión de filtros primos, entonces L es distributivo.*

Una aplicación fundamental del Teorema del filtro primo es el siguiente teorema de representación. Este teorema fue primero probado para álgebras de Boole y más tarde extendido para retículos distributivos por M. Stone.

Teorema 1.23 (de representación de Stone)**.** *Sea L un retículo distributivo acotado. Entonces existe un conjunto ordenado $\langle X, \subseteq \rangle$ y $\mathcal{D} \subseteq Up\,(X)$ un subretículo tal que*

$$L \cong \mathcal{D}.$$

Demostración. Consideremos el conjunto ordenado $\langle X\,(L)\,, \subseteq \rangle$, con $X(L)$ como el conjunto de filtros primo, y el retículo acotado $Up\,(X\,(L))$. Definimos la aplicación ,

$$\sigma : L \to Up(X\,(L))$$

$$\sigma\,(a) = \{P \in X\,(L) : a \in P\}.$$

Probemos que σ es un homomorfismo inyectivo de retículos acotados. Es sencillo ver que $\sigma\,(0) = \emptyset$ y $\sigma\,(1) = X\,(L)$. Además por las propiedades de los filtros primos se deduce que

$$\sigma\,(a \wedge b) = \sigma\,(a) \cap \sigma\,(b)\,,$$

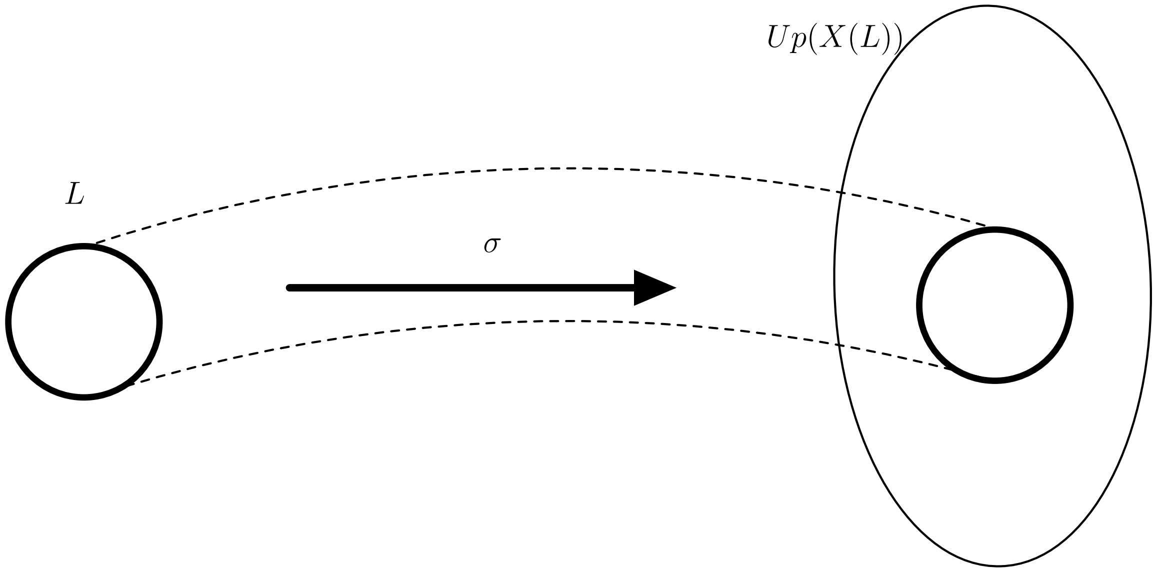
y además

$$\sigma\,(a \vee b) = \sigma\,(a) \cup \sigma\,(b)\,.$$

Por lo tanto, σ es un homomorfismo de retículos. Basta probar que σ es un isomorfismo de orden para obtener que σ es inyectivo. Si $a \leq b$, entonces es claro que $\sigma\,(a) \subseteq \sigma\,(b)$. Supongamos que $a \nleq b$, entonces por el Corolario 1.21, existe $P \in X\,(L)$ tal que $a \in P$ y $b \notin P$, y luego $\sigma\,(a) \nsubseteq \sigma\,(b)$. Por tanto,

$$L \cong \sigma\,(L) = \{\sigma\,(a) : a \in L\}$$

y $\sigma\,(L)$ es un sub-retículo de $Up\,(X\,(L))$. ■



1.4. Conceptos algebraicos

Definición 1.24. Sea L un retículo. Una *congruencia* definida sobre L es una relación de equivalencia $\Theta \subseteq L \times L$ tal que si (a, b), $(a', b') \in \Theta$ se cumple:

$$(a \wedge a', b \wedge b') \in \Theta \text{ y } (a \vee a', b \vee b') \in \Theta$$

para cada $a, b, a', b' \in L$.

Para cada $a \in L$, denotamos la *clase de* a como sigue

$$a/\Theta = \{b \in L : (a, b) \in \Theta\},$$

y denotamos al *espacio cociente* como $L/\Theta = \{a/\Theta : a \in L\}$.

Observemos que en cualquier retículo existen relaciones de congruencias triviales y se definen como siguen:

$$(a, b) \in \Delta \Leftrightarrow a = b,$$

y

$$(a, b) \in \nabla \Leftrightarrow a, b \in L,$$

es decir, $\nabla = A \times A$. El conjunto de todas congruencias de L se denota por $Con(L)$.

Teorema 1.25. *Sea L un retículo distributivo acotado. El conjunto ordenado $\langle Con(L), \subseteq \rangle$ es un retículo distributivo acotado con primer elemento Δ y último elemento ∇, la* *operación de ínfimo se definen como la intersección de congruencias, es decir,*

$$\Theta_1 \wedge \Theta_2 = \Theta_1 \cap \Theta_2,$$

y la operación de supremo como

$$(a, b) \in \Theta_1 \vee \Theta_2 \Leftrightarrow \exists z_1, ..., z_n \text{ tal que } a = z_0, b = z_n \text{ y } (z_i, z_{i+1}) \in \Theta_1 \cup \Theta_2.$$

Lema 1.26. *Sean L, S dos retículos. Si $h : L \to S$ es un homomorfismo, entonces el subconjunto*

$$Ker(h) = \{(a, b) : h(a) = h(b)\}$$

es una congruencia en L.

Existe un estrecha relación entre las congruencias de un retículos y los filtros (ideales). El siguiente resultado esta formulado utilizando filtros, pero los mismos puede ser expresado utilizando ideales.

Teorema 1.27. *Sea L un retículo distributivo acotado y F un filtro de L. Entonces:*

1. *Las relaciones*

$$\Theta(F) = \{(a, b) : \exists f \in F(a \wedge f = b \wedge f)\} \in Con(L).$$

2. *Para cada $a \in L$,*

$$a \in F \Leftrightarrow a/\Theta(F) = F.$$

   En consecuencia, $1/\Theta(F) = F$.

3. *Si F_1, F_2 son dos filtros tal que $F_1 \subseteq F_2$, entonces $\Theta(F_1) \subseteq \Theta(F_2)$.*

4. *$\Theta(F) = \{(a, a) : a \in L\} = \Delta$ si y sólo si $F = [1)$.*

5. *Para cada par $\Theta_1, \Theta_2 \in Con(L)$ tal que $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$, entonces*

$$F(\Theta_1) = 1/\Theta_1(F) \subseteq F(\Theta_2) = 1/\Theta_2(F).$$

En cualquier estructura algebraica uno de los problemas fundamentales es estudiar álgebras particulares que permitan deducir propiedades generales de la estructura algebraica en consideración. Esto llevó a introducir el concepto de álgebra subdirectamente irreducible.

Definición 1.28. Un álgebra no trivial es *subdirectamente irreducible* si existe una congruencia minimal no trivial.

Ejemplo 1.13. Un retículo distributivo es subdirectamente irreducible si y sólo si el cardinal del retículo es 2.

El último concepto algebraico que vamos a introducir es el de suma ordinal.

Definición 1.29. Sean $\{P_i\}_{1\leq i\leq n}$ una familia finita de conjuntos ordenados disjuntos. Definimos la *suma ordinal* de la familia como el siguiente conjunto:

$$P_1 \bigoplus P_2 \bigoplus \ldots \bigoplus P_n = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n,$$

y definimos un orden parcial como:

$$x \leq y \Leftrightarrow (x, y \in P_i \text{ y } x \leq y) \text{ o } (x \in P_i\,, y \in P_j \text{ e } i \leq j).$$

Observemos que es necesario que los conjuntos ordenados sean disjuntos para que este bien definido el orden de una la suma ordinal.

Capítulo 2

Retículos con negación

En este capítulo introducimos la variedad de los retículos distributivos acotados dotados de un operador de negación. Devienen naturalmente como una generalización de algunas estructuras algebraicas como las álgebras de Boole, retículos distributivos pseudocomplementados, álgebras de Quasi-Stone, álgebras de debil-Quasi-Stone, álgebras de De Morgan, álgebras de Semi-De Morgan, entre otras. Consideraremos la categoría de los retículos con una negación y mostraremos que esta categoría es dual a la categoría de espacios de Priestley con una relación particular y además, para finalizar el capítulo caracterizaremos las congruencias y subálgebras de estos retículos. Este capítulo se basa en su mayoría en la construcción propuesta en el artículo [7]. Una ampliación de resultados se puede encontrar en [8].

2.1. Definiciones preliminares

Definición 2.1. Un *retículo con negación*, o $\neg$-*retículo*, es un par $\langle L, \neg \rangle$ donde L es un retículo distributivo acotado y $\neg : L \to L$ es una función unaria satisfaciendo las siguientes condiciones:

N1 $\quad \neg 0 = 1,$

N2 $\quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$

Observemos que de la definición de la operación de negación obtenemos inmediatamente que:

$$a \leq b \Leftrightarrow \neg b \leq \neg a,$$

en efecto,

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow \neg(a \vee b) = \neg b \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b = \neg b \Leftrightarrow \neg b \leq \neg a.$$

Ahora vamos a mostrar diversos ejemplos de retículos con negación.

Ejemplo 2.1. Tal vez el ejemplo más importante de retículo con negación sean las álgebras de Boole. Recordemos que un álgebra de Boole es un álgebra

$$\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle,$$

tal que:

- $\langle B, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ es un retículo distributivo acotado,
- $\neg$ es una operación unaria que satisface las siguientes condiciones:
    - $a \vee \neg a = 1$ y $a \wedge \neg a = 0$ para todo $a \in L$.

Se puede demostrar que las siguientes condiciones se satisfacen en toda álgebra de Boole:

1. $\neg 0 = 1$ y $\neg 1 = 0$,
2. $a \wedge b = 0$ si y sólo si $a \leq \neg b$,
3. $\neg\neg a = a$,
4. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$,
5. $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$,
6. $\neg\neg a \vee \neg a = 1$.

Por lo tanto toda álgebra de Boole es, en particular, un retículo con negación.

Ejemplo 2.2. Todo conjunto genera un álgebra de Boole y por lo tanto un retículo con negación. En efecto, consideremos un conjunto X no vacío y sea $\mathcal{P}(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X. Si definimos $\neg U = X \setminus U$, entonces es sencillo comprobar que

$$\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \neg, \emptyset, X \rangle,$$

es un álgebra de Boole, llamada el *álgebra de Boole de conjuntos* o el álgebra de Boole asociada al conjunto X. Para simplificar la notación podemos escribir directamente $\mathcal{P}(X)$.

Ahora daremos un ejemplo de retículos distributivos acotados con una negación que generaliza la negación booleana. Esta negación es conocida como *pseudocomplementación*.

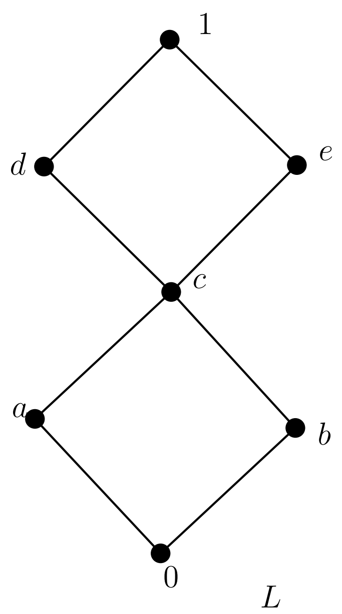
Ejemplo 2.3. Un *retículo pseudocomplementado*, o *p-álgebra*, es un álgebra

$$\langle L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$$

donde

1. $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ es un retículo acotado,
2. $\neg : L \to L$ es una operación unaria definida en L satisfaciendo la siguiente condición:
$$a \wedge b = 0 \text{ si y sólo si } a \leq \neg b.$$

Consideremos el retículo de la siguiente figura.



El pseudocomplemento de cualquier retículo finito se define como sigue

$$\neg a = \bigvee \{x \in L : x \wedge a = 0\},$$

entonces

$$\neg a = \bigvee \{0, b\} = b \text{ , } \neg b = \bigvee \{0, a\} = a \text{ ,}$$

$$\neg c = \neg d = \neg e = \neg 1 = \bigvee \{0\} = 0 \text{ , } \neg 0 = \bigvee \{a, b, c, d, e, 1\} = 1,$$

es fácil ver que es un retículo pseudocomplementado y, en particular, es un $\neg$-retículo.

Es importante notar que la definición del pseudocomplemento de un elemento no depende de la propiedad de distributividad. Es decir, existen retículos no necesariamente distributivos donde todo elemento tiene pseudocomplemento.

Un ejemplo importante de p-álgebra y por lo tanto de retículo con negación se obtiene a partir de un espacio topológico.

Ejemplo 2.4. Si $\langle X, \tau \rangle$ es un espacio topológico, entonces es sencillo comprobar que

$$\langle \tau, \cup, \cap, \emptyset, X \rangle$$

es un retículo distributivo acotado. Definiendo

$$\neg U = \mathrm{cl}(U)^c,$$

para cada abierto U, entonces

$$\langle \tau, \cup, \cap, \neg, \emptyset, X \rangle ,$$

es una p-álgebra. En efecto, sean $U, V \in \tau$ tal que

$$U \cap V = \emptyset,$$

tomemos un elemento $x \in U$, luego por definición tenemos que $x \notin Cl(V)$, donde $Cl(V)$ denota a la clausra de V. es decir, $x \in Cl(V)^c$, por tanto $U \subseteq \neg V$. Supongamos ahora que $U \subseteq \neg V$, si existe un elemento $x \in U \cap V \subseteq \neg V \cap V$ entonces $x \in Cl(V)^c$ y $x \in V$ es absurdo.

Ejemplo 2.5. Toda cadena acotada (con 0 y 1) es un $\neg$-retículo (de hecho es una p-álgebra). La negación $\neg$ se define como

$$\neg a = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ \\ 0 & \text{si } a \neq 0 \end{cases} .$$

Ejemplo 2.6. Sea L un retículo distributivo acotado. Consideremos el retículo distributivo acotado $Id(L)$ de los ideales de L. Para cada $I \in Id(L)$, definimos el conjunto

$$I^* = \{a \in L : a \wedge i = 0 \forall i \in I\} .$$

Entonces

$$\langle Id(L), \veebar, \barwedge, ^*, \{0\}, L \rangle ,$$

es una p-álgebra. En efecto, probemos primero que $I^* \in Id(L)$, para cada I ideal. Consideremos un ideal arbitrario I. Es claro que $0 \in I^*$, pues $i \wedge 0 = 0$ para todo $i \in I$. Sean $a, b \in L$ tales que $a \leq b$ y $b \in I^*$, entonces para todo $i \in I$

$$i \wedge b = 0,$$

luego

$$i \wedge a \leq i \wedge b = 0,$$

lo que implica que $a \in I^*$. Sean $a, b \in I^*$, entonces por definición tenemos que para todo $i \in I$, $i \wedge a = 0$ e $i \wedge b = 0$. Luego, para todo $i \in I$

$$0 = (i \wedge a) \vee (i \wedge b) = i \wedge (a \vee b) \ ,$$

lo cual obtenemos que $a \vee b \in I^*$. Por lo tanto, concluimos que I^* es efectivamente un ideal.

Supongamos que $I_1 \barwedge I_2 = \{0\}$, entonces $I_1 \cap I_2 = \{0\}$. Queremos ver que $I_1 \subseteq I_2^*$. Sea $x \in I_1$ tal que $x \neq 0$, y sea $i \in I_2$. Siendo que $x \wedge i \leq x \in I_1$ y $x \wedge i \leq i \in I_2$, obtenemos que $x \wedge i \in I_1 \cap I_2$. Luego, por hipótesis $x \wedge i = 0$, es decir, $x \in I_2^*$. Recíprocamente, supongamos que $x \in I_1 \cap I_2$. Usando la hipótesis, tenemos que

$$x \in I_1 \cap I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_2^*,$$

de donde $x \wedge i = 0$ para todo $i \in I_2$. Además, siendo que $x \in I_2$ en particular se cumple que

$$x = x \wedge x = 0,$$

lo que implica que x debe ser necesariamente el 0. Por tanto $I_1 \barwedge I_2 = \{0\}$.

Ejemplo 2.7. Todo retículo completo acotado que satisface la propiedad de distributividad infinita:

$$a \wedge \bigvee \{b_i : i \in I\} = \bigvee \{a \wedge b_i : i \in I\} \, ,$$

es un retículo pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento de un elemento $a \in L$ se define como

$$\neg a = \bigvee \{b \in L : a \wedge b = 0\} \, .$$

En efecto, supongamos que $a \wedge b = 0$ entonces $a \in \{c \in L : c \wedge b = 0\}$. Luego

$$a \leq \bigvee \{c \in L : c \wedge b = 0\} = \neg b.$$

Recíprocamente, supongamos que

$$a \leq \neg b = \bigvee \{c \in L : c \wedge b = 0\},$$

entonces

$$a \wedge b \leq \bigvee \{c \in L : c \wedge b = 0\} \wedge b = 0.$$

Ejemplo 2.8. Sea B un álgebra de Boole. Consideremos el siguiente subconjunto del producto $B \times B$

$$B^{[2]} = \{(a, b) \in B \times B : a \leq b\}.$$

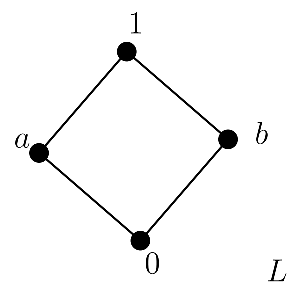
Se puede comprobar que $B^{[2]}$ es un retículo distributivo acotado bajo las operaciones de ínfimo y supremo definidas coordenada a coordenada. Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces

$$\begin{aligned}(a, b) \wedge (c, d) = 0 \quad &\Leftrightarrow a \wedge c = 0 \text{ y } b \wedge d = 0 \\ &\Leftrightarrow c \leq \neg a \text{ y } d \leq \neg b \\ &\Leftrightarrow c \leq d \leq \neg b \leq \neg a.\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe el pseudocomplemento del par (a, b) y está dado por $(a, b)^* = (\neg b, \neg b) \in B^{[2]}$, pues es válido que $\neg b \leq \neg b$.

Observemos que todos los retículos mencionados anteriormente son particularmente álgebras pseudocomplementadas, así pues veamos por último un ejemplo sencillo donde el retículo sea $\neg$-retículo pero no p-álgebra.

Ejemplo 2.9. Consideremos el retículo de la figura.



Veamos que si definimos la negación de la siguiente manera:

$$\neg a = b\ ,\ \neg b = a\ ,\ \neg 1 = 0\ ,\ \neg 0 = 1,$$

obtenemos sencillamente un álgebra de Boole.

En su lugar, definamos una nueva negación, $\sim$, como sigue

$$\sim a = \sim b = \sim 1 = 0\ ,\ \ \sim 0 = 1.$$

Es claro ver que cumple condiciones de $\neg$-retículo, en efecto

$$\sim (a \vee b) = \sim 1 = 0 = 0 \wedge 0 = \sim a \wedge \sim b,$$

$$\sim (a \vee 1) = \sim 1 = 0 = 0 \wedge 0 = \sim a \wedge \sim 1,$$

$$\sim (a \vee 0) = \sim a = 0 = 0 \wedge 1 = \sim a \wedge \sim 0,$$

$$\sim (0 \vee 1) = \sim 1 = 0 = 1 \wedge 0 = \sim 0 \wedge \sim 1,$$

y los demás casos son similares. Sin embargo, no es una p-álgebra, pues dado que

$$a \wedge b = 0,$$

pero $a \nleq \sim b = 0$.

Cabe destacar que para un mismo retículo se pueden definir varias negaciones u operadores de negación, resultando en ágebras con características y propiedades completamente diferentes. Por otro lado, este sencillo ejemplo muestra la diversa cantidad de retículos dotados de una operación de negación que estamos describiendo.

Para finalizar, en el próximo ejemplo vamos a necesitar el concepto de composición de relaciones e introduciremos los marcos ordenados.

Definición 2.2. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto ordenado y además $R \subseteq X \times X$ una relación binaria en X, siendo $R(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\}$. La composición entre dos relaciones R y S sobre X se define como

$$R \circ S = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X\ ,(x, z) \in R \text{ y } (z, y) \in S\}.$$

Definición 2.3. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto ordenado y sea R una relación binaria en X. Llamaremos a la terna $\langle X, \leq, R \rangle$ *marco ordenado* o *marco*. Si además R cumple la siguiente propiedad:

$$(\leq \circ R \circ \leq^{-1}) \subseteq R,$$

entonces llamaremos a la terna $\langle X, \leq, R\rangle$ $\neg$-*marco*.

Ejemplo 2.10. Sea $\langle X, \leq, R\rangle$ un $\neg$-marco. Denotamos $Up(X)$ al conjunto de partes crecientes de X y

$$\neg_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U = \emptyset\}.$$

Entonces

$$\langle Up(X), \cup, \cap, \neg_R, \emptyset, X\rangle$$

es un $\neg$-retículo. En efecto, veamos que $\neg_R(U) \in Up(X)$ con $U \in Up(X)$. Sea $x \in \neg_R(U)$ y $x \leq y$, entonces $R(x) \cap U = \emptyset$. Supongamos que $y \notin \neg_R(U)$, es decir

$$R(y) \cap U \neq \emptyset.$$

Entonces existe un elemento $z \in X$ tal que $z \in R(y)$ y $z \in U$. Como $x \leq y$, $(y, z) \in R$ y $z \leq z$, entonces $(x, z) \in (\leq \circ R \circ \leq^{-1}) \subseteq R$, por definición de $\neg$-marco. Siendo también que $z \in U$, entonces $R(x) \cap U \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Por otro lado,

$$\neg_R(\emptyset) = \{x \in X : R(x) \cap \emptyset = \emptyset\} = X,$$

y también

$$\begin{aligned}
\neg_R(U \cup V) &= \{x \in X : R(x) \cap (U \cup V) = \emptyset\} \\
&= \{x \in X : (R(x) \cap U) \cup (R(x) \cap V) = \emptyset\} \\
&= \{x \in X : R(x) \cap U = \emptyset\} \cap \{x \in X : R(x) \cap V = \emptyset\} \\
&= \neg_R(U) \cap \neg_R(V).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle Up(X), \neg_R\rangle$ es un $\neg$-retículo.

2.2. Teorema de representación

Nuestro próximo objetivo es dar un teorema de representación para los $\neg$-retículos por medio de conjuntos, el cual es uno de los temas principales en cualquier teoría de estructuras. El siguiente Lema es una herramienta fundamental que vamos a aplicar continuamente para desarrollar la teoría de retículos con negación.

Lema 2.4. *Sea $\langle L, \neg\rangle$ un $\neg$-retículo. Entonces*

1. *Para cada $P \in X(L)$ el conjunto*

$$\neg^{-1}(P) = \{a \in L : \neg a \in P\}$$

es un ideal.

2. *Para cada $a \in L$, $\neg a \notin P$ si y sólo si existe $Q \in X(L)$ tal que*

$$\neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset \text{ y } a \in Q.$$

Demostración. (1) Veamos que $\neg^{-1}(P)$ es un ideal con $P \in X(L)$. Es fácil ver que $0 \in \neg^{-1}(P)$, dado que $\neg 0 = 1 \in P$. Sean $x, y \in \neg^{-1}(P)$. Entonces $\neg x, \neg y \in P$. Siendo P filtro, entonces $\neg x \wedge \neg y \in P$. Además

$$\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y),$$

implica que $x \vee y \in \neg^{-1}(P)$. Sea $x \in \neg^{-1}(P)$ e $y \leq x$, entonces $\neg x \leq \neg y$ y, además, $\neg x \in P$. Por lo tanto, $\neg y \in P$, es decir, $y \in \neg^{-1}(P)$.

(2) Sea $a \in L$ tal que $\neg a \notin P$, y consideremos el filtro generado por a, $[a)$. Si $z \in [a) \cap \neg^{-1}(P)$ entonces $a \leq z$ y $\neg z \in P$, es decir, $\neg z \leq \neg a \in P$ lo cual es absurdo. Luego

$$[a) \cap \neg^{-1}(P) = \emptyset,$$

y por el Teorema del Filtro Primo 1.20, existe un $Q \in X(L)$ tal que $\neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset$ y además $a \in Q$. La recíproca es inmediata. ■

Ahora, dado un $\neg$-retículo L, introduciremos una relación binaria $R_\neg$ definida sobre el conjunto de los filtros primos de L. Sea $R_\neg \subseteq X(L) \times X(L)$ dada por

$$(P, Q) \in R_\neg \Leftrightarrow \neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset.$$

Lema 2.5. *Sea L un $\neg$-retículo. Entonces se cumple*

$$(\subseteq \circ R_\neg \circ \subseteq^{-1}) \subseteq R_\neg.$$

Demostración. Sea $(P, D) \in (\subseteq \circ R_\neg \circ \subseteq^{-1})$. Entonces existen $Q, W \in X(L)$ tal que

$$P \subseteq Q \text{ , } (Q, W) \in R_\neg \text{ y } D \subseteq W.$$

Veamos que $(P, D) \in R_\neg$. Como $P \subseteq Q$ entonces

$$\neg^{-1}(P) = \{x \in L : \neg x \in P\} \subseteq \{x \in L : \neg x \in Q\} = \neg^{-1}(Q).$$

Luego

$$\neg^{-1}(P) \cap W \subseteq \neg^{-1}(Q) \cap W,$$

tenemos que $(P, W) \in R_\neg$, es decir

$$\neg^{-1}(P) \cap W = \emptyset.$$

Y siendo que $D \subseteq W$, entonces $\neg^{-1}(P) \cap D \subseteq \neg^{-1}(P) \cap W$. Por lo cual, $(P, D) \in R_\neg$. ■

Tenemos entonces el $\neg$-marco asociado a L el cual es la estructura algebraica $\langle X(L), \subseteq, R_\neg\rangle$. Observemos que dado un $\neg$-retículo, podemos afirmar ahora que, con toda generalidad,

$$\langle Up(X(L)), \neg_R\rangle$$

es un $\neg$-retículo, (ver Ejemplo 2.10). Entonces podemos preguntarnos qué relación hay entre el retículo L y $Up(X(L))$, por lo cual tenemos el siguiente teorema de representación.

Definición 2.6. Un *homomorfismo entre $\neg$-retículo* es un homomorfismo de retículos distributivos acotados que además preservan la operación de negación.

Teorema 2.7 (de representación)**.** *Para cada $\neg$-retículo L existe un marco $\langle X, \leq, R_\neg\rangle$ tal que L es isomorfo a una subálgebra de $\langle Up(X(L)), \neg_{R_\neg}\rangle$.*

Demostración. Recordemos que del Teorema de Representación 1.23 sabemos que existe un isomorfismo de retículos entre L y el conjunto de filtros primos ordenados por la inclusión, siendo la aplicación

$$\sigma : L \to Up(X(L))$$

$$\sigma(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}.$$

Bastará ver que σ es un homomorfismo de $\neg$-retículos, es decir, además cumple la siguiente propiedad:

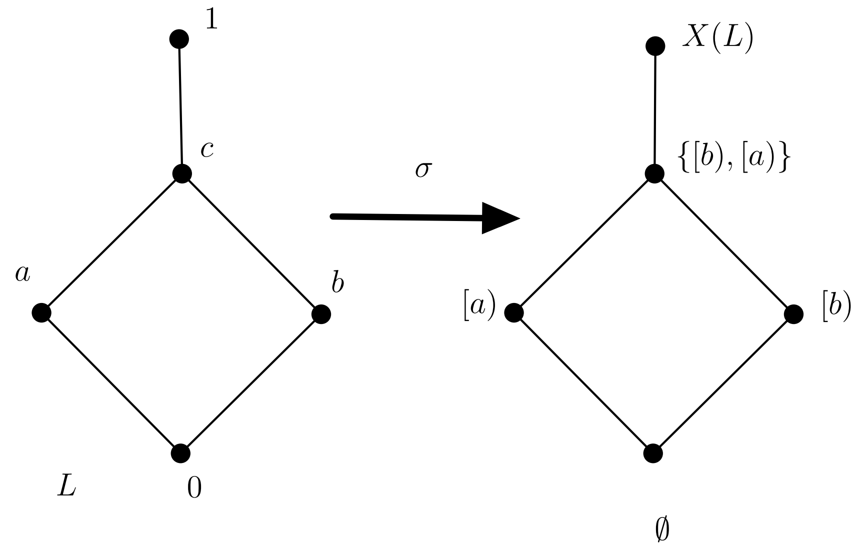
$$\neg_{R_\neg}\sigma(a) = \sigma(\neg a)$$

para cada $a \in L$. Observemos que es equivalente a probar que:

$$\{P \in X(L) : R_\neg(P) \cap \sigma(a) = \emptyset\} = \{P \in X(L) : \neg a \in P\}.$$

Sea $P \in X(L)$ tal que $\neg a \in P$, y supongamos que existe un $Q \in R_\neg(P) \cap \sigma(a)$. Entonces $\neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset$ y $a \in Q$, por lo que $a \in \neg^{-1}(P) \cap Q$, absurdo. Recíprocamente, sea $P \in X(L)$ tal que $R_\neg(P) \cap \sigma(a) = \emptyset$ y supongamos que $\neg a \notin P$. Por el Lema 2.4, existe un $Q \in X(L)$ tal que $\neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset$ y $a \in Q$. Luego $Q \in R_\neg(P) \cap \sigma(a)$, llegando a una contradicción. ■

Ejemplo 2.11. En la siguiente figura se muestra el retículo distributivo L y el retículo distributivo $Up(X(L))$.



Como L es un retículo finito, en particular un retículo distributivo completo, podemos definir la negación como el pseudocomplemento

$$\neg x = \bigvee\{y \in L : x \wedge y = 0\}.$$

Luego

$$\neg a = b \;,\; \neg b = a \;,\; \neg c = 0 \;,\; \neg 0 = 1 \;,\; \neg 1 = 0.$$

Determinemos la relación $R_\neg$. Por un lado, observemos que

$$X(L) = \{[a), [b), [1)\}.$$

Ahora determinemos los conjuntos

$$\neg^{-1}([a)) = \{0, b\} \ , \ \neg^{-1}([b)) = \{0, a\} \ , \ \neg^{-1}([1)) = \{0\},$$

y con ello

$$R_{\neg}([a)) = \{[1), [a)\} \ , \ R_{\neg}([b)) = \{[1), [b)\} \ , \ R_{\neg}([1)) = X(L).$$

Observemos que $R_{\neg}$verifica la condición

$$(\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1}) \subseteq R_{\neg},$$

en efecto, si consideramos el par $([a), [b)) \notin\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1}$ pues cada filtro $[a)$ y $[b)$ son maximales y $([a), [b)) \notin R_{\neg}$. De manera análoga concluimos que $([b), [a)) \notin\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1}$. Para los demás pares consideramos el mayor filtro, y siendo reflexiva $R_{\neg}$ obtenemos que

$$([a), [a)) \in\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1} \in R_{\neg} \ , \ ([a), [1)) \in\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1} \in R_{\neg} \ ,$$

$$([b), [b)) \in\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1} \in R_{\neg} \ , \ ([b), [1)) \in\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1} \in R_{\neg},$$

$$([1), [a)) \in\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1} \in R_{\neg} \ , \ ([1), [b)) \in\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1} \in R_{\neg} \ , \ ([1), [1)) \in\subseteq \circ R_{\neg} \circ \subseteq^{-1} \in R_{\neg}.$$

Ahora utilicemos el Teorema de representación 2.7 para determinar una nueva negación en nuestro retículo. Para ello definimos una relación $S_{\sim}$ tal que cumple con la condición

$$(\subseteq \circ S_{\sim} \circ \subseteq^{-1}) \subseteq S_{\sim}.$$

Si consideramos el siguiente subconjunto de $X(L) \times X(L)$ como sigue

$$S_{\sim}([a)) = X(L) \ , \ S_{\sim}([b)) = X(L) \ , \ S_{\sim}([1)) = X(L),$$

no es difícil ver que lo cumple, pues $S_{\sim} = X(L) \times X(L)$. Por lo que se sigue, usando el Teorema de Representación 2.7,

$$\sigma(\sim a) = \sim_R \sigma(a) = \emptyset = \sigma(0),$$

$$\sigma(\sim b) = \sim_R \sigma(b) = \emptyset = \sigma(0),$$

$$\sigma(\sim c) = \sim_R \sigma(c) = \emptyset = \sigma(0),$$

$$\sigma(\sim 1) = \sim_R \sigma(1) = \emptyset = \sigma(0),$$

$$\sigma(\sim 0) =\sim_R \sigma(0) = X(L) = \sigma(1),$$

entonces la negación queda definida como sigue

$$\sim a =\sim b =\sim c =\sim 1 = 0\ ,\ \sim 0 = 1,$$

lo cual obtenemos un $\neg$-retículo, y además no es p-álgebra pues $a \wedge b = 0$ pero $a \nleq \sim b = 0$.

2.3. Representación y dualidad topológica

El objetivo de esta sección es mostrar una representación topológica para los retículos con negación, y algunas de sus propiedades. Pero antes vamos a recordar los conceptos necesarios sobre la dualidad de Priestley. Una ampliación sobre de la teoría de la dualidad de Priestley puede encontrarse en [9].

Definición 2.8. Un espacio topológico disconexo en el orden es un triple $\langle X, \leq, \tau\rangle$ tal que $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto ordenado, $\langle X, \tau\rangle$ un espacio topológico y dados $x, y \in X$ tal que $x \nleq y$ entonces existe un conjunto abierto-cerrado creciente U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Un *espacio de Priestley* es un espacio topológico disconexo compacto.

Observemos que de la definición se obtiene que:

- Si $\langle X, \leq, \tau\rangle$ es un espacio de Priestley finito, entonces la topología es la discreta.
- Para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado.

Si $\langle X, \leq, \tau\rangle$ es un espacio de Priestley, el conjunto de todos los abierto-cerrado crecientes de X se denota por $D(X)$. Siendo

$$\langle D(X), \cap, \cup, \emptyset, X\rangle$$

un anillo de conjuntos, entonces es fácil ver que es un retículo distributivo acotado. Por simplicidad notacional vamos a denotar con $D(X)$ al retículo distributivo $\langle D(X), \cap, \cup, \emptyset, X\rangle$. También, el conjunto de abiertos-cerrados decrecientes $D(X)^c$ forma nuevamente un retículo distributivo acotado con las operaciones de unión e intersección.

Proposición 2.9. *Sea $\langle X, \leq, \tau \rangle$ un espacio de Priestley, entonces la colección de los abiertos-cerrados crecientes juntos con sus complementos, es decir*

$$D(X) \cup D(X)^c$$

es una subbase para la topología τ.

De esta forma, se deduce de la proposición anterior que los abiertos-cerrados crecientes forman una base para los abiertos crecientes o cerrados crecientes. Por tanto, en todo espacio de Priestley la colección de los conjuntos de la forma

$$B = \{U \cap V^c : U, V \in D(X)\}$$

es una base para la topología. Se pueden obtener propiedades de un espacio de Priestley como enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.10. *Sea $\langle X, \leq, \tau \rangle$ un espacio de Priestley e $Y \subseteq X$:*

1. *Si Y es cerrado decreciente y $x \notin Y$, existe $U \in D(X)$ tal que $x \in U$ y $Y \cap U = \emptyset$.*

2. *Si Y es cerrado creciente y $x \notin Y$, existe $U \in D(X)^c$ tal que $x \in U$ y $Y \cap U = \emptyset$.*

3. *$x \leq y$ si y sólo si para cada $U \in D(X)$ tal que $x \in U$, $y \in U$.*

4. *Si $Y \subseteq X$ es cerrado decreciente y $x \notin Y$, entonces existe un $U \in D(X)^c$ tal que $Y \subseteq U$ y $x \notin U$.*

5. *Si $Y, Z \subseteq X$ son cerrados disjuntos, el primero decreciente y el segundo creciente, entonces existe $U \in D(X)^c$ tal que $Y \subseteq U$ y $Z \cap U = \emptyset$.*

6. *Si $Y \subseteq X$ es cerrado creciente y $x \notin Y$, existe $U \in D(X)$ tal que $Y \subseteq U$ y $x \notin U$.*

7. *Para cada $F \subseteq X$ cerrado, $(F]$ y $[F)$ son cerrados.*

8. *Para cada $x \in X$, $(x]$ y $[x)$ son cerrados.*

9. *Si Y es cerrado, entonces para cada $x \in Y$ existe un $y \in Y$ elemento maximal tal que $x \leq y$.*

Hemos dicho que todo espacio de Priestley X tiene asociado un retículo distributivo acotado $D(X)$. Ahora, todo retículo distributivo acotado L tiene a su vez un espacio de Priestey asociado, tal espacio se construye definiendo en el conjunto de filtros primos $X(L)$ una topológica, τ_L, de tal forma que la terna $\langle X(L), \subseteq, \tau_L\rangle$ sea un espacio de Priestley. Para ello consideremos la topología τ_L sobre $X(L)$ determinada por la subbase

$$S_L = \{\sigma(a) : a \in L\} \cup \{\sigma(a)^c : a \in L\},$$

del cual tenemos el resultado siguiente.

Teorema 2.11. *El espacio topológico ordenado $X(L) = \langle X(L), \subseteq, \tau_L\rangle$ es un espacio de Priestley.*

De esta manera $\langle X(L), \subseteq, \tau_L\rangle$ se dice que es el *espacio dual* de L, y lo denotamos simplemente como $X(L)$. Naturalmente podemos preguntarnos qué conexión existe entre L y $D(X(L))$, y también, entre X y $X(D(X))$. En el primer caso, L es isomorfo a $D(X(L))$ y apelando al Teorema de Representación 2.7 que afirma que L es isomorfo a $\sigma(L) = \{\sigma(a) : a \in L\}$, se prueba que $\sigma(L)$ es justamente el dual de $X(L)$, es decir,

$$\sigma(L) = D(X(L)).$$

En el segundo caso, tenemos que X y $X(D(X))$ son homeomorfos como espacios topológicos e isomorfos como conjuntos ordenados.

Proposición 2.12. *Si L es un retículo distributivo acotado, entonces*

$$D(X(L)) = \{\sigma(a) : a \in L\},$$

y

$$D(X(L))^c = \{\sigma(a)^c : a \in L\},$$

Teorema 2.13. *Sea L un retículo distributivo acotado y sea $\langle X(L), \subseteq, \tau_L\rangle$ su espacio de Priestley. Entonces*

$$\sigma : L \to D(X(L))$$

$$\sigma(a) = \{P \in X(L) : a \in P\},$$

es un isomorfismo de retículos.

Teorema 2.14. *Sea $X = \langle X, \leq, \tau \rangle$ un espacio de Priestley. Entonces X y $X(D(X))$ son isomorfos como conjuntos ordenados y homeomorfos como espacios topológicos mediante la función*

$$F_X : X \to X(D(X))$$

dado por

$$F_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}.$$

Ya tenemos la teoría necesaria de la dualidad de Priestley. Ahora sea L un $\neg$-retículo, consideremos

$$\Sigma(L) = \langle X(L), R_\neg \rangle$$

y

$$\Gamma(\Sigma(L)) = \langle D(X(L)), \cup, \cap, \neg_{R_\neg}, \emptyset, X(L) \rangle,$$

donde $\neg_{R_\neg}\sigma(a) = \{P \in X(L) : R_\neg(P) \cap \sigma(a) = \emptyset\}$. Entonces, por los resultados del Teorema de Representación 2.7 y del Teorema 2.13, obtenemos inmediatamente que:

Teorema 2.15 (de Representación)**.** *Sea L un $\neg$-retículo. Entonces $\Gamma(\Sigma(L))$ es un $\neg$-retículo y la aplicación $\sigma : L \to \Gamma(\Sigma(L))$ es un isomorfismo de retículos.*

Nos proponemos definir el dual de un $\neg$-retículo. Observemos que, en lugar de trabajar con retículos distributivos, lo hemos hecho con retículos con una operación adicional, esto nos lleva a definir un nuevo espacio denominado el espacio de negación es un espacio de Priestley dotado de una relación binaria.

Definición 2.16. Un $\neg$-*espacio o espacio de negación* es un par $\langle X, R \rangle$, donde X es un espacio de Priestley y R es una relación binaria definida sobre X tal que cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X$, $R(x)$ es un subconjunto cerrado y decreciente de X.

2. Para todo $U \in D(X)$, $\neg_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U = \emptyset\} \in D(X)$.

Lema 2.17. *Sea $\langle X, R \rangle$ un $\neg$-espacio. Si $x \leq y$ entonces $R(y) \subseteq R(x)$.*

Demostración. Supongamos que $R(y) \nsubseteq R(x)$, entonces existe un elemento $z \in X$ tal que $z \in R(y)$ y $z \notin R(x)$. Por la Proposición 2.10, siendo $R(x)$ un subconjunto decreciente, existe un $U \in D(X)$ tal que

$$z \in U \text{ y } U \cap R(x) = \emptyset,$$

lo que implica que $x \in \neg_R(U)$. Por ser $\langle X, R\rangle$ un$\neg$-espacio, $\neg_R(U)$ es creciente e $y \in \neg_R(U),$ entonces $U \cap R(y) = \emptyset$. Pero $z \in R(y) \cap U$ por lo que es absurdo. ■

El Lema anterior nos dice que la relación binaria R de todo $\neg$-espacio cumple la propiedad de antimonotonía.

Lema 2.18. *Si $\langle X, R\rangle$ es un $\neg$-espacio, entonces*

$$(\leq \circ R \circ \leq^{-1}) \subseteq R.$$

Demostración. Sea $(x, y) \in (\leq \circ R \circ \leq^{-1})$. Entonces existen $w, z \in X$ tal que

$$x \leq w \;,\; (w, z) \in R \;,\; y \leq z.$$

Supongamos que $(x, y) \notin R$, es decir, $y \notin R(x)$. Como $R(x)$ es cerrado y decreciente, por la Proposición 2.10, existe $U \in D(x)$ tal que

$$R(x) \cap U = \emptyset \text{ e } y \in U.$$

Siendo que $x \leq w$, por antimonotonía de R, $R(w) \subseteq R(x)$. Entonces

$$R(w) \cap U = \emptyset,$$

es decir, $w \in \neg_R(U)$. Pero como $y \leq z$, $z \in U$, llegamos a un absurdo dado que por hipótesis $z \in R(w)$. ■

En otras palabras, la definición de $\neg$-espacio exige que la relación binaria R cumpla la condición $(\leq \circ R \circ \leq^{-1}) \subseteq R$, donde esta misma la cumple la relación definida en el dual de un $\neg$-retículo como hemos visto. En virtud de la definición de un $\neg$-espacio, condición (2), se obtiene el $\neg$-retículo asociado a $\langle X, R\rangle$ como

$$\Gamma(X) = \langle D(X), \cup, \cap, \neg_R, \emptyset, X\rangle \,.$$

Denotamos R_D a la relación definida sobre $X(D(X))$ por medio del operador $\neg_R$, es decir,

$$(F_X(x), F_X(y)) \in R_D \Leftrightarrow \neg_R^{-1}(F_X(x)) \cap F_X(y) = \emptyset.$$

También, denotamos con $Max(Y)$ al conjunto de elementos maximales de Y.

Proposición 2.19. *Sea $\langle X, R\rangle$ un par tal que X es espacio de Priestley y R una* *relación binaria definida en X tal que:*

$$\neg_R(U) \in D(X),$$

para todo $U \in D(X)$. Entonces son equivalentes:

1. *$R(x)$ es subconjunto cerrado y decreciente en X.*

2. *Si $(F_X(x), F_X(y)) \in R_D$ entonces $(x, y) \in R$.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Sean $x, y \in X$ tal que $(F_X(x), F_X(y)) \in R_D$ y supongamos que $(x, y) \notin R$, es decir, $y \notin R(x)$. Siendo que $R(x)$ es un subconjunto cerrado y decreciente por la Proposición 2.10, existe $U \in D(x)$ tal que

$$y \in U \text{ y } R(x) \cap U = \emptyset,$$

es equivalente a

$$U \in F_X(y) \text{ y } x \in \neg_R(U).$$

Luego $\neg_R(U) \in F_X(x)$, es decir, $U \in \neg_R^{-1}(F_X(x))$. Por lo tanto,

$$U \in \neg_R^{-1}(F_X(x)) \cap F_X(y),$$

es decir, $(F_X(x), F_X(y)) \notin R_D$ lo cual es absurdo.

$(2) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $R(x)$ no es cerrado, entonces existe $y \in X$ tal que

$$y \in Cl(R(x)) \text{ y } y \notin R(x).$$

Luego por hipótesis obtenemos que $(F_X(x), F_X(y)) \notin R_D$, por lo que existe un $U \in D(X)$ tal que

$$x \in \neg_R^{-1}(U) \text{ y } y \in U,$$

es decir, $R(x) \cap U = \emptyset$. Siendo que $y \in U$, entonces se contradice con el hecho que $y \in Cl(R(x))$ y quedaría $R(x) \cap U \neq \emptyset$. ■

Esta proposición da un mejor sentido para la definición de $\neg$-espacio, siendo que la relación en $X(D(X))$ está ligada a la relación de X.

Teorema 2.20. *Sea $\langle L, \neg \rangle$ un $\neg$-retículo. Entonces el par $\Sigma(L) = \langle X(L), R_\neg \rangle$ es un $\neg$-espacio.*

Demostración. Veamos que $R_\neg(P)$ es cerrado y decreciente en $X(L)$, con P un filtro primo. Sea $V \in R_\neg(P)$ y $W \subseteq V$,

$$\neg^{-1}(P) \cap W \subseteq \neg^{-1}(P) \cap V = \emptyset,$$

entonces $W \in R_\neg(P)$, es decir, $R_\neg(P)$ es decreciente. Por otro lado, veamos que si $Q \notin R_\neg(P)$ entonces existe un $a \in \neg^{-1}(P) \cap Q$. Luego,

$$a \in \neg^{-1}(P) \text{ y } a \in Q,$$

y, por definición, $a \in \neg^{-1}(P) \Leftrightarrow \neg a \in P$. Luego $P \in \sigma(\neg a)$. Por el Teorema de representación 2.15,

$$P \in \sigma(\neg a) = \neg_{R_\neg}(\sigma(a)),$$

y entonces

$$R_\neg(P) \cap \sigma(a) = \emptyset.$$

Luego siendo que $Q \in \sigma(a)$ y $R_\neg(P) \cap \sigma(a) = \emptyset$, entonces $Q \notin Cl(R_\neg(P))$. Se concluye que $R_\neg(P) = Cl(R_\neg(P))$, es decir, $R_\neg(P)$ es cerrado.

Veamos que si $U \in D(X(L))$, tenemos que $\neg_{R_\neg}(U) \in D(X(L))$. Nuevamente, por el Teorema de representación 2.15, si $U \in D(X(L))$ entonces existe $a \in L$ tal que $\sigma(a) = U$. Teniendo en cuenta que σ es un isomorfismo de retículo

$$\neg_{R_\neg}(U) = \neg_{R_\neg}(\sigma(a)) = \sigma(\neg a) \in D(X).$$

■

Definición 2.21. Sean $\langle X, R_X \rangle$ e $\langle Y, R_Y \rangle$ dos $\neg$-espacios. Una función $f : X \to Y$ se llama $\neg$-*morfismo* si f es continua, monótona y cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x, y \in X$, si $(x, y) \in R_X$ entonces $(f(x), f(y)) \in R_Y$.
2. Si $(f(x), y) \in R_Y$, entonces existe un elemento $z \in X$ tal que $(x, z) \in R_X$ y $y \leq f(z)$.

Probaremos a continuación que la noción de homomorfismo entre $\neg$-retículos se corresponde dualmente con la noción de $\neg$-morfismo.

Teorema 2.22. *Sean $\langle X, R_X \rangle$ e $\langle Y, R_Y \rangle$ dos $\neg$-espacio y sea $f : X \to Y$ una* *función continua y monótona. Entonces la función*

$$\Gamma_f : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$$

$$\Gamma_f(U) = f^{-1}(U),$$

para todo $U \in D(X)$ es un homomorfismo de $\neg$-retículo si y sólo si f es un morfismo de $\neg$-espacio.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $y \in R_Y(f(x))$. Supongamos que para todo elemento z tal que $z \in R_X(x)$ implica que $y \nleq f(z)$. Por propiedad de espacio de Priestley, Y es disconexo en el orden, por tanto existe un $U_z \in D(Y)$ tal que

$$y \in U_z \text{ y } f(z) \notin U_z \ ,$$

es decir, $z \notin f^{-1}(U_z)$ o de otra forma $z \in f^{-1}(U_z)^c$. Dado que f es continua $f^{-1}(U_z)^c$, es un abierto que contiene a z. Entonces podemos tomar el siguiente cubrimiento

$$R_X(x) \subseteq \bigcup_{z \in R_X(x)} f^{-1}(U_z)^c \ ,$$

siendo $R_X(x)$ compacto, dado que $R_X(x)$ es cerrado y X compacto. Entonces por compacidad existen $U_1...U_n \in D(Y)$ tal que

$$\begin{aligned} R_X(x) &\subseteq f^{-1}(U_1)^c \cup ... \cup f^{-1}(U_n)^c \\ &= (f^{-1}(U_1) \cap ... \cap f^{-1}(U_n))^c \\ &= f^{-1}(U_1 \cap ... \cap U_n)^c. \end{aligned}$$

Llamando $U = U_1 \cap ... \cap U_n$, obtenemos

$$R_X(x) \subseteq f^{-1}(U)^c.$$

Además tenemos que $U \in D(Y)$ e $y \in U$. Por otro lado,

$$R_X(x) \subseteq X \backslash f^{-1}(U) \text{ con } y \in U,$$

$$R_X(x) \cap f^{-1}(U) = \emptyset,$$

$$x \in \neg_R(f^{-1}(U)).$$

Siendo Γ es homomorfismo de $\neg$-retículos,

$$\neg_R(f^{-1}(U)) = \neg_R\Gamma(U) = \Gamma(\neg_R U) = f^{-1}(\neg_R(U)).$$

Entonces

$$x \in f^{-1}(\neg_R(U)),$$

$$f(x) \in \neg_R(U),$$

$$R_Y(f(x)) \cap U = \emptyset,$$

pero es absurdo pues $y \in R_Y(f(x)) \cap U$.

Sean $x, y \in X$, tal que $y \in R_X(x)$ y supongamos que $f(y) \notin R_Y(f(x))$. Entonces $f(y) \in R_Y(f(x))^c$ y $R_Y(f(x))^c$ es abierto. Siendo que f es una función continua, $y \in R_X(x)^c$ lo cual es un absurdo.

($\Leftarrow$) Como f es continua y monótona, para ver que Γ es un $\neg$-homomorfismo de retículos bastará probar que

$$f^{-1}(\neg_R U) = \neg_{R_X} f^{-1}(U) \quad \forall U \in D(Y),$$

que es equivalente con

$$\{x \in X : f(x) \in \neg_R(U)\} = \left\{x \in X : R_X(x) \cap f^{-1}(U) = \emptyset\right\}.$$

Así,

$$R_Y(f(x)) \cap U = \emptyset \;\Leftrightarrow\; R_X(x) \cap f^{-1}(U) = \emptyset \quad \forall U \in D(Y).$$

Sea $R_Y(f(x)) \cap U = \emptyset$ con $U \in D(Y)$. Supongamos que existe $z \in R_X(x) \cap f^{-1}(U)$. Entonces

$$z \in R_X(x) \text{ y } f(z) \in U,$$

y siendo que f un $\neg$-morfismo,

$$f(z) \in R_Y(f(x)) \text{ y } f(z) \in U.$$

En suma, tenemos que $f(z) \in R_Y(f(x)) \cap U$ lo cual es absurdo.

Sea $R_X(x) \cap f^{-1}(U) = \emptyset$ y supongamos que existe un $z \in R_Y(f(x)) \cap U$. Entonces

$$z \in R_Y(f(x)) \text{ y } z \in U,$$

y siendo f un $\neg$-morfismo, existe $y \in X$ que cumple que

$$y \in R_X(x)\,,\, z \leq f(y) \text{ y } z \in U,$$

como U es creciente y f es monótono, se sigue que

$$y \in R_X(x) \cap f^{-1}(U)$$

lo cual nuevamente llegamos a una contradicción. ■

Dado un $\neg$-espacio $\langle X, R\rangle$, hemos visto que al dotar a la familia de los conjuntos abiertos-cerrados crecientes $D(X)$ de las operaciones de intersección y unión y una negación $\neg_R$ se obtiene un $\neg$-retículo. Naturalemente podemos preguntarnos cúal es la relación entre los espacios de negación X y $\Sigma(\Gamma(X)))$.

Teorema 2.23. *Sea $\langle X, R\rangle$ un $\neg$-espacio. Entonces la función $F_X : X \to X(D(X))$ es un isomorfismo de $\neg$-espacio.*

Demostración. Sabemos que por el Teorema 2.14 F_X es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo de espacios de Priestley, falta ver que

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (F_X(x), F_X(y)) \in R_D,$$

para probar que F_X es efectivamente un $\neg$-isomorfismo. Sea $y \in R(x)$. Supongamos que existe un $U \in \neg_R^{-1}(F_X(x)) \cap F_X(y)$. Entonces

$$\neg_R(U) \in F_X(x) \text{ y } y \in U$$

implica que

$$x \in \neg_R(U) \text{ y } y \in U,$$

luego $R(x) \cap U = \emptyset$, pero $y \in R(x) \cap U$ lo que es un absurdo. Supongamos que $(F_X(x), F_X(y)) \in R_D$. Por la Proposición 2.19 obtenemos directamente que $(x, y) \in R$. ■

Hemos vistos que todo $\neg$-retículo, L, tiene un $\neg$-espacio asociado, $\Sigma(L)$, el *dual* de L. Por otra parte hemos visto que todo $\neg$-espacio, X, tiene asociado un $\neg$-retículo, $D(X)$, el *dual* de X. Además, los retículos L y $D(X(L))$ están fuertemente conectados, (Teorema 2.15), siendo un homomorfismo entre $\neg$-retículos y un isomorfismo de orden sobreyectivo. También los espacios X y $X(D(X))$ son un morfismo entre $\neg$-espacios, es decir, homeomorfos como espacios topológicos, un isomorfismo de orden sobreyectivo y un morfismo como estructura relacional.

2.4. Congruencias

Una de las aplicaciones más importantes que tiene la dualidad de Priestley es que permite caracterizar topológicamente las congruencias de un retículo distributivo acotado. Esta caracterización es muy importante y ha tenido un fuerte impacto no solo en la teoría de retículos distributivos acotados sino también en la teoría de los retículos distributivos con operaciones adicionales. En esta sección se pretende llevar estos resultados al caso de los $\neg$-espacio, generalizando los resultados conocidos de Priestley.

Sea L un retículo distributivo acotado y $X(L)$ su espacio de Priestley. Dado un conjunto cerrado $Y \subseteq X(L)$ definimos la relación binaria :

$$(a,b) \in \Theta(Y) \ \Leftrightarrow \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y.$$

Esta relación es una congruencia puesto que es el núcleo del homomorfismo

$$f : L \to D(Y)$$

definido por

$$f(a) = \sigma_L(a) \cap Y.$$

Por otro lado, denotamos a $C(X)$ como el conjunto de los cerrados de X, siendo X un espacio topológico. Se comprueba fácilmente que

$$\langle C(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$$

es un retículo distributivo acotado. Denotamos $C(X) = \langle C(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$. El próximo resultado de la teoría de Priestley nos dice que toda congruencia de un retículo distributivo acotado tiene asociado un único cerrado del espacio dual.

Teorema 2.24. *Sea L un retículo distributivo acotado. Entonces la función*

$$f : C(X(L)) \to Con(L)$$

$$f(Y) = \Theta(Y)$$

es un isomorfismo entre el retículo de los subconjuntos cerrado $C(X(L))$ y el retículo $Con(L)$.

Ahora el objetivo es llevar este mismo resultado al contexto más general, de los retículos con negación, y para ello tenemos que definir en el retículo de $C(X(L))$

una propiedad adicional definida como sigue.

Definición 2.25. Sea $\langle X, R\rangle$ un $\neg$-espacio. Un subconjunto $Y \subseteq X$ se llama *R-saturado* si para todo $x \in Y$, $MaxR(x) \subseteq Y$.

Entonces denotamos por $C_R(X(L))$ al retículo de los subconjuntos R-saturados y cerrados de $X(L)$.

Definición 2.26. Sea L un $\neg$-retículo. Una *$\neg$-congruencia* en L es un congruencia de retículo que satisface que para cada par $(a, b) \in \Theta$:

$$(\neg a, \neg b) \in \Theta.$$

Teorema 2.27. *Sea $\langle L, \neg\rangle$ un $\neg$-retículo y $R = R_\neg$. Entonces la correspondencia*

$$\Theta : C_R(X(L)) \to Con(L, \neg)$$

$$\Theta(Y) = \{(a, b) \in L \times L : \sigma(a) \cap Y = \sigma(b) \cap Y\},$$

establece un anti-isomorfismo.

Demostración. Sea $(a, b) \in \Theta(Y)$ y supongamos que existe un $P \in X(L)$ tal que $P \in \sigma(\neg a) \cap Y$ y $P \notin \sigma(\neg b) \cap Y$. Entonces

$$\neg a \in P \text{ , } \neg b \notin P \text{ y } P \in Y.$$

Por Lema 2.4, existe un $Q \in X(L)$ cumpliendo que

$$b \in Q \text{ y } Q \in R(P).$$

Ahora sabiendo que $R(P)$ es cerrado, por Proposición 2.10, existe un $W \in X(L)$ tal que

$$Q \subseteq W \text{ y } W \in Max\ R(P).$$

Como Y es R-saturado y $P \in Y$, entonces $W \in Y$. De esta manera, obtenemos que

$$W \in \sigma(b) \cap Y = \sigma(a) \cap Y,$$

entonces $a \in W$. Siendo que $\neg a \in P$ y $(P, W) \in R$, debe ser $a \notin W$ que es una contradicción. Por tanto debe ser que $P \in \sigma(\neg b) \cap Y$.

Supongamos que $\theta \in Con(L, \neg)$ e Y un subconjunto cerrado de $X(L)$. Sea $P \in Y$. Queremos ver que $Max\ R(P) \subseteq Y$. Sea $Q \in Max\ R(P)$ y supongamos que $Q \notin Y$. Como Y es cerrado,

$$Q \in Y^c = \bigcup_{(a,b)\in L\times L} (\sigma(a) \cap \sigma(b)^c).$$

Luego, por definición, existe $a \in Q$ y $b \notin Q$ tal que

$$Q \in \sigma(a) \cap \sigma(b)^c \subseteq Y^c.$$

Además

$$\sigma(a) \cap \sigma(b)^c \cap Y = \emptyset \text{ implica } \sigma(a) \cap Y = \sigma(a) \cap \sigma(b) \cap Y = \sigma(a \wedge b) \cap Y,$$

y luego $(a, a \wedge b) \in \Theta$. Como $Q \in Max\ R(P)$ entonces $[Q \cup \{b\}) \notin R_\neg(P)$, es decir existe un elemento $z \in L$ tal que $z \in [Q \cup \{b\}) \cap \neg^{-1}(P)$. Se sigue que $z \in Q$ y $\neg(z \wedge b) \in P$. Como

$$(a, a \wedge b) \in \Theta,$$

por ser Θ una congruencia, se cumple

$$(a \wedge z, a \wedge b \wedge z) \in \Theta$$

y

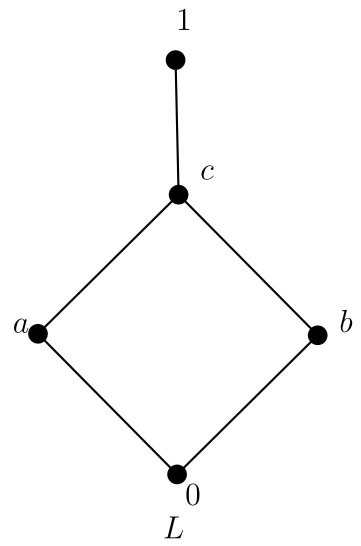
$$(\neg(a \wedge z), \neg(a \wedge b \wedge z)) \in \Theta,$$

pero $\neg(b \wedge z) \leq \neg(a \wedge b \wedge z) \in P$, y $a \wedge z \leq z \notin Q$, lo que es absurdo. Por lo tanto, Y es R-saturado. ■

Veamos mediante un ejemplo sencillo cómo se obtiene la correspondencia unívoca entre las $\neg$-congruencias y los cerrados R-saturados.

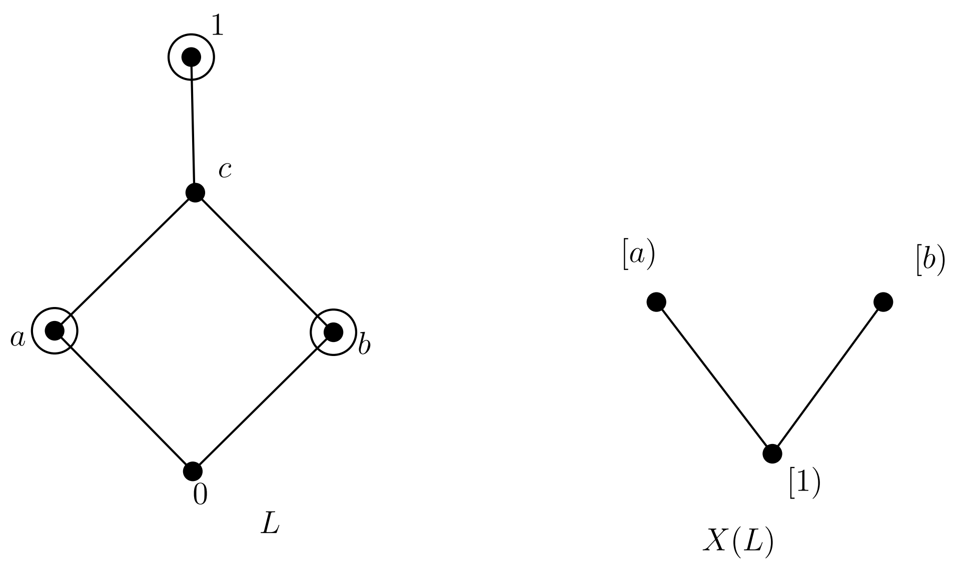
Ejemplo 2.12. Consideremos el siguiente retículo distributivo con la negación definida como el seudocomplemento

$$\neg a = b\ ,\ \neg b = a\ ,\ \neg 0 = 1\ ,\ \neg 1 = \neg c = 0.$$



Observemos que el conjunto de filtros primos esta dado por

$$X(L) = \{[a)\ , [b)\ , [1)\}.$$



Identifiquemos cuál es el conjunto de los cerrados R-saturados en el espacio de Priestley $X(L)$. Recordemos que en un espacio de Priestley finito los unipuntuales son cerrados y abiertos, lo cual podemos identificar a los cerrados como partes de

$X(L)$, es decir,

$$C(X(L)) = \{\emptyset\,, [a)\,, [b)\,, [1)\,, \{[a)\,, [b)\}\,, \{[a)\,, [1)\}\,, \{[b)\,, [1)\}\,, X(L)\}.$$

Luego observemos que

$$R([a)) = \{[a)\,, [1)\}\,, R([b)) = \{[b)\,, [1)\}\,, R([1)) = X(L)$$

lo que podemos definir a los cerrados R-saturados como

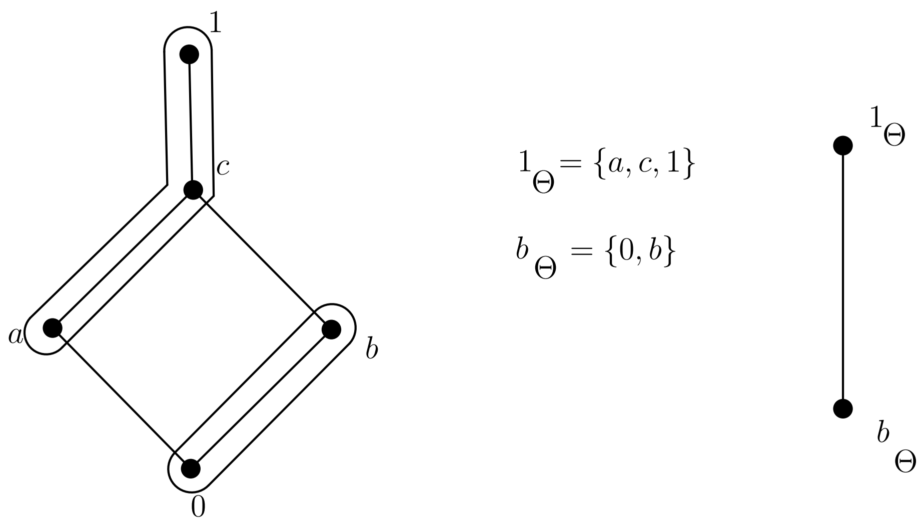
$$C_R(X(L)) = \{\emptyset\,, [a)\,, [b)\,, \{[a)\,, [b)\}\,, X(L)\}.$$

Tomemos por ejemplo, el conjunto $[a)$ y veamos cuál es la $\neg$-congruencia que le corresponde. Por definición,

$$\Theta([a)) = \{(0,0)\,, (a,a)\,, (b,b)\,, (c,c)\,, (1,1)\,, (1,a)\,,$$

$$(a,1)\,, (1,c)\,, (c,1)\,, (a,c)\,, (c,a)\,, (b,0)\,, (0,b)\}$$

lo que nos genera la siguiente partición del conjunto, con sus respectivas clases de equivalencias.



Es fácil de ver que es una $\neg$-congruencia, y única por construcción.

Ahora veamos que dada la relación $\Theta([a))$, podemos volver al cerrado R-saturado

$[a)$ por medio de la definición

$$Y_{\Theta([a))} = \{\pi^{-1}(P) : P \in X(L/\Theta)\}.$$

Siendo que $X(L/\Theta) = \{[1_\Theta)\}$, entonces

$$Y_{\Theta([a))} = [a).$$

2.5. Subálgebras

En esta sección vamos a estudiar las relaciones asociadas a las subálgebras de un retículo con negación describiendo sus propiedades. Recordemos más resultados de los espacios de Priestley.

Definición 2.28. Sea $\langle L, \neg\rangle$ un $\neg$-retículo. Decimos que el subconjunto $M \subseteq L$ es una *subálgebra* si:

1. M es un $(0,1)$-subretículo de L.
2. Para cada $a \in M$, $\neg a \in M$.

Definición 2.29. Sea L un retículo distributivo acotado y sea M un $(0,1)$-subretículo. Definimos

$$R_M = \{(P,Q) \in X(L) \times X(L) : Q \cap M \subseteq P\},$$

y para $R \subseteq X(L) \times X(L)$ podemos definir

$$M_R = \{U \in D(X(L)) : R^{-1}(U) \subseteq U\}.$$

Observemos que la relación R_M es un *preorden reticular*, es decir, la relación es reflexiva, transitiva y satisface que si $P, Q \in X(L)$ tal que $(P,Q) \notin R_M$, existe un $U \in M_R$ tal que $P \in U$ y $Q \notin U$. Es fácil ver que la colección de las relaciones de preorden reticulares de un espacio de Priestley ordenado por la inclusión, forma un retículo completo cuyo ínfimo es la intersección.

Proposición 2.30. *Sea L un retículo distributivo acotado. Entonces el retículo de los subretículos de L es dualmente isomorfo al retículo de las relaciones de preorden reticular de $X(L)$.*

En otras palabras, M_R es un $(0,1)$-subretículo de $D(X(L))$, lo cual nos afirma que la correspondencia

$$M \mapsto R_M$$

establece un anti-isomorfismo entre el retículo de los $(0,1)$-subretículos en L y las relaciones de preorden definidas en $X(L)$.

Ahora vamos a extender este resultado a los retículos con negación.

Teorema 2.31. *Sea $\langle L, \neg\rangle$un $\neg$-retículo y sea M un $(0,1)$-subretículo de L. Entonces son equivalentes:*

1. *M es subálgebra.*

2. *$R_M^{-1} \circ R_\neg \subseteq R_\neg \circ R_M$.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Sea $(P,D) \in R_M^{-1} \circ R_\neg$, entonces existe $Q \in X(L)$ tal que

$$(P,Q) \in R_M^{-1} \text{ y } (Q,D) \in R_\neg.$$

Luego

$$P \cap M \subseteq Q \text{ y } \neg^{-1}(Q) \cap D = \emptyset.$$

Consideremos el filtro generado por $D \cap M$, $[D \cap M)$. Veamos que

$$[D \cap M) \cap \neg^{-1}(P) = \emptyset.$$

Si suponemos que existe un elemento tal que $z \in [D \cap M)$ y $z \in \neg^{-1}(P)$, entonces existe $a \in D \cap M$ tal que $a \leq z$ y $\neg z \in P$ y con ello $\neg z \leq \neg a \in P$. Como M es subálgebra, $\neg a \in M$. Luego

$$\neg a \in M \cap P \subseteq Q,$$

lo cual es una contradicción, pues $a \in \neg^{-1}(Q) \cap D$. Luego, siendo $\neg^{-1}(P)$ un ideal, por el Teorema del Filtro Primo 1.20 existe un filtro primo Z tal que

$$[D \cap M) \subseteq Z \text{ y } \neg^{-1}(P) \cap Z = \emptyset.$$

Se sigue que

$$D \cap M \subseteq Z \text{ y } (P,Z) \in R_\neg$$

y con ello obtenemos que $(P,D) \in R_\neg \circ R_M$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Supongamos que M no es subálgebra. Por lo tanto, existe un elemento $a \in M$ tal que $\neg a \notin M$. Consideremos $[a)$ y $[[\neg a) \cap M)$. Si suponemos que existe $z \in [[\neg a) \cap M) \cap (\neg a]$, entonces existe $b \in [\neg a) \cap M$ cumpliendo

$$b \leq z \text{ y } z \leq \neg a,$$

entonces

$$b \in M \text{ y } \neg a \leq b \leq z \leq \neg a.$$

Luego obtenemos que $\neg a = b \in M$ lo cual es absurdo. Entonces concluimos que

$$[[\neg a) \cap M) \cap (\neg a] = \emptyset.$$

Por el Teorema del Filtro Primo 1.20, existe $P \in X(L)$ tal que

$$[[\neg a) \cap M) \subseteq P \text{ y } \neg a \notin P,$$

y por Lema 2.4 existe $Q \in X(L)$ tal que

$$(P, Q) \in R_{\neg} \text{ y } a \in Q.$$

Consideremos ahora $(P^c \cap M]$. Supongamos que existe un elemento

$$z \in [\neg a) \cap (P^c \cap M].$$

Entonces existe un elemento $b \in P^c \cap M$ tal que

$$\neg a \leq z \text{ y } z \leq b,$$

y con ello obtenemos que $\neg a \leq b$. Entonces $b \in [\neg a) \cap M \subseteq P$, lo cual es absurdo dado que $b \in P^c$. Luego $[\neg a) \cap (P^c \cap M] = \emptyset$ y, nuevamente por el Teorema del Filtro Primo 1.20, existe $D \in X(L)$ tal que

$$(P^c \cap M] \cap D = \emptyset \text{ y } [\neg a) \subseteq D,$$

es decir,

$$P^c \cap (M \cap D) = \emptyset \text{ y } \neg a \in D.$$

Finalmente, obtenemos que

$$(D, Q) \in R_M^{-1} \circ R_{\neg} \subseteq R_{\neg} \circ R_M.$$

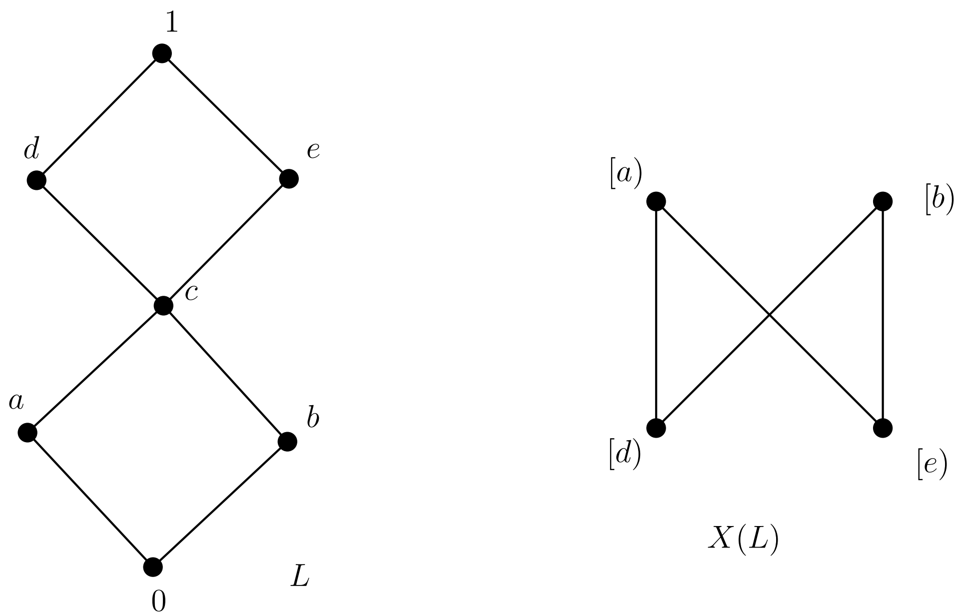
Entonces existe un $Z \in X(L)$ cumpliendo

$$(D, Z) \in R_\neg \text{ y } (Z, Q) \in R_M$$

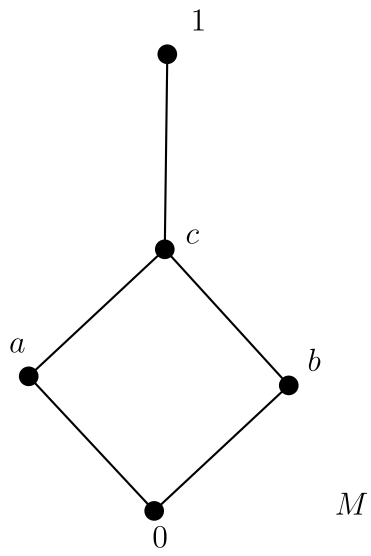
y por definición equivale a $\neg^{-1}(D) \cap Z = \emptyset$ y $Q \cap M \subseteq Z$, pero es absurdo pues $a \in Q \cap M \subseteq Z$. Luego $a \in \neg^{-1}(D) \cap Z$. ■

Corolario 2.32. *Sea $\langle L, \neg \rangle$ un $\neg$-retículo. La correspondencia $M \to R_M$ establece un anti-isomorfismo de retículos entre las subálgebras de L sobre el retículo de preorden reticulados de $X(L)$ tal que $R_M^{-1} \circ R_\neg \subseteq R_\neg \circ R_M$.*

Ejemplo 2.13. Consideremos el siguiente retículo distributivo pseudocomplementado



y tomemos la $(0, 1)$-subálgebra M como sigue



Veamos cómo dada la subálgebra M determina una relación de preorden reticular. Por definición, $R_M = \{(P,Q) \in X(L) : Q \cap M \subseteq P\}$, entonces

$$\begin{aligned} R_M([a)) &= \{[a)\,,[d)\,,[e)\}, \\ R_M([b)) &= \{[b)\,,[d)\,,[e)\}, \\ R_M([d)) &= \{[d)\,,[e)\}, \\ R_M([e)) &= \{[d)\,,[e)\}. \end{aligned}$$

Claramente R_M es reflexiva y transitiva. Si tomamos, por ejemplo, el par $([e),[b))$ que no pertenece al conjunto R_M entonces tenemos que $R^{-1}([b)) = \{[b)\} \subseteq \{[b)\}$ y $\{[e)\} \nsubseteq \{[b)\}$.

Ahora, dada la relación de preorden reticular, R_M, determinemos M_{R_M}. Por definición $M_R = \{U \in D(X(L)) : R^{-1}(U) \subseteq U\}$, entonces:

$$\begin{aligned} R^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \subseteq \emptyset, \\ R^{-1}([a)) &= \{[a)\} \subseteq \{[a)\}, \\ R^{-1}([b)) &= \{[b)\} \subseteq \{[b)\}, \\ R^{-1}([a)\,,[b)) &= \{[a)\,,[b)\} \subseteq \{[a)\,,[b)\}, \\ R^{-1}([a)\,,[b)\,,[d)) &= \{[a)\,,[b)\,,[e)\} \nsubseteq \{[a)\,,[b)\,,[d)\}, \\ R^{-1}([a)\,,[b)\,,[e)) &= \{[a)\,,[b)\,,[d)\} \nsubseteq \{[a)\,,[b)\,,[e)\}, \\ R^{-1}(X(L)) &= X(L) \subseteq X(L), \end{aligned}$$

por lo tanto nos queda que

$$M_{R_M} = \{\emptyset\,,[a)\,,[b)\,,\{[a)\,,[b)\}\,,X(L)\},$$

y por medio del Teorema de Representación 2.15 afirmamos que M_{R_M} es efectivamente isomorfo a M, estableciendo así la correspondencia unívoca entre las $(0,1)$-subálgebras y las relaciones de preorden reticular.

Capítulo 3

Retículos pseudocomplementados

La noción de retículo pseudocomplementado fue definida en el Ejemplo 2.3 y es una de las generalizaciones más conocidas de las álgebras de Boole. El estudio de estas álgebras comenzó en un artículo de Gilvenko en 1929, y más tarde en 1956 con el estudio del problema 70 de Brikhoff, que luego dio lugar a la caracterización de retículos de Stone mediante ideales primos minimales (dualmente con los filtros primos maximales o ultrafiltros). En este capítulo nos dedicaremos a estudiar las propiedades más importantes de esta clase de álgebras y a desarrollar la dualidad presentada anteriormente para estas álgebras. Los resultados pueden encontrarse principalmene en el libro [2], y también en [10].

3.1. Identidades y propiedades básicas

Recordemos que un retículo pseudocomplementado, o p-álgebra, es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ tal que $L = \langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado y satisface la siguiente propiedad:

$$a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a \leq \neg b.$$

Observemos que esta definición no es ecuacional. Pero la clase de las p-álgebras admite una definición por medio de ecuaciones, y en consecuencia es una variedad. Primero demostraremos algunas propiedades básicas del pseudocomplemento y después demostraremos que la clase de las p-álgebras son una variedad.

Proposición 3.1. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ un p-álgebra distributiva. Si $a \in L$, entonces:*

1. $a \wedge \neg a = 0$.

2. $\neg a \wedge \neg\neg a = 0$.

3. $a \leq b$, *entonces* $\neg b \leq \neg a$.

4. $a \leq \neg\neg a$.

5. $\neg a = \neg\neg\neg a$.

6. $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow \neg\neg a \wedge b = 0$.

7. $\neg\neg(a \wedge b) = \neg\neg a \wedge \neg\neg b$.

8. $\neg(a \vee \neg a) = 0$.

9. $\neg 0 = 1$.

10. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

11. $\neg\neg(\neg\neg a \vee \neg\neg b) = \neg\neg(a \vee b)$.

Demostración. 1. Siendo que $\neg a \leq \neg a$, por definición de p-álgebra, $\neg a \wedge a = 0$.

2. Se sigue de $\neg\neg a \leq \neg\neg a$.

3. Si $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$. Luego $\neg b = \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ si y sólo si $\neg b \leq \neg a$.

4. Por 1 sabemos que

$$a \wedge \neg a = 0.$$

Luego por definición

$$a \leq \neg\neg a.$$

5. Por 2 y definición del álgebra, tenemos que $\neg a \leq \neg\neg\neg a$. Y, por 3 y 4, obtenemos que $\neg\neg\neg a \leq \neg a$.

6. Se sigue de las siguientes equivalencias

$$a \wedge b = 0 \Leftrightarrow b \leq \neg a \Leftrightarrow \neg\neg a \leq \neg b \Leftrightarrow b \wedge \neg\neg a = 0.$$

7. Observemos que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$. Entonces

$$\neg\neg(a \wedge b) \leq \neg\neg a \text{ y } \neg\neg(a \wedge b) \leq \neg\neg b,$$

$$\neg\neg(a \wedge b) \leq \neg\neg a \wedge \neg\neg b.$$

Por otro lado, aplicando la propiedad 6,

$$\begin{aligned} 0 &= (a \wedge b) \wedge \neg(a \wedge b) \\ &= a \wedge (b \wedge \neg(a \wedge b)) \\ &= \neg\neg a \wedge (b \wedge \neg(a \wedge b)) \\ &= b \wedge (\neg\neg a \wedge \neg(a \wedge b)) \\ &= \neg\neg b \wedge (\neg\neg a \wedge \neg(a \wedge b)). \end{aligned}$$

Luego, por definición del álgebra,

$$\neg\neg a \wedge \neg\neg b \leq \neg\neg(a \wedge b).$$

8. Aplicando la propiedad 7, obtenemos

$$\neg(a \vee \neg a) = \neg a \wedge \neg\neg a = 0.$$

9. Dado que $1 \wedge 0 = 0$, entonces, por definición, $1 \leq \neg 0$. Luego $\neg 0 = 1$.

10. Observemos que

$$(\neg a \wedge \neg b) \wedge (a \vee b) = (\neg a \wedge \neg b \wedge a) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge b),$$

por 1 obtenemos

$$\neg a \wedge \neg b \wedge (a \vee b) = 0,$$

y por definición de p-álgebras

$$\neg a \wedge \neg b \leq \neg(a \vee b).$$

Ahora podemos escribir las siguientes desigualdades

$$a \leq a \vee b \Rightarrow \neg(a \vee b) \leq \neg a$$

$$b \leq a \vee b \Rightarrow \neg(a \vee b) \leq \neg b,$$

y de esta manera $\neg(a \vee b) \leq \neg a \wedge \neg b$.

11. Dado que

$$\neg(\neg\neg a \vee \neg\neg b) = \neg\neg\neg a \wedge \neg\neg\neg b,$$

entonces

$$\begin{aligned}\neg\neg(\neg\neg a \vee \neg\neg b) &= \neg(\neg\neg\neg a \wedge \neg\neg\neg b)\\ &= \neg(\neg a \wedge \neg b)\\ &= \neg\neg(a \vee b).\end{aligned}$$

■

Observemos que toda p-álgebra es particularmente un $\neg$-retículo.

Teorema 3.2. *La clase de los retículos pseudocomplementados dsitributivos es una clase equacional de álgebras de tipo $\langle 2,2,1,0,0\rangle$ con las operaciones $\langle \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle$ y se define por las siguientes identidades:*

1. *Las identidades de un retículo (Proposición 1.5).*
2. $a \wedge \neg(a \wedge b) = a \wedge \neg b$.
3. $a \wedge \neg 0 = a$.
4. $\neg\neg 0 = 0$.

Demostración. Supongamos que L es retículo pseudocomplementado. Veamos que se verifican las propiedades 1, 2, 3 y 4. La 1 es inmediato. Para 2, vemos que si $a, b \in L$,

$$a \wedge b \leq b$$

$$\neg b \leq \neg(a \wedge b)$$

$$a \wedge \neg b \leq a \wedge \neg(a \wedge b) \leq \neg(a \wedge b).$$

Si suponemos que $b \leq a$ el resultado es inmediato, dado que en ese caso $a \wedge b = b$. Si $a \leq b$ entonces

$$\begin{aligned}a \wedge b &= a\\ \neg(a \wedge b) &= \neg a\\ a \wedge \neg(a \wedge b) &= \neg a \wedge a = 0 \leq a \wedge \neg b.\end{aligned}$$

Por lo tanto, 2 se cumple. Para 3 vemos que, si $a \in L$,

$$a \wedge 0 = 0 \Leftrightarrow a \leq \neg 0 \Leftrightarrow a \wedge \neg 0 = a.$$

Por último, para probar la identidad 4, por un lado tenemos que

$$\neg\neg 0 \wedge 0 = 0 \Leftrightarrow \neg\neg 0 \leq \neg 0 \Leftrightarrow \neg\neg 0 \wedge \neg 0 = \neg\neg 0,$$

y por otro,

$$\neg 0 \leq \neg 0 \Leftrightarrow \neg 0 \wedge \neg\neg 0 = 0$$

De ambas ecuaciones obtenemos que

$$\neg\neg 0 = 0.$$

Supongamos que tenemos un álgebra que cumple las propiedades de 1, 2, 3 y 4. Probemos que es retículo pseudocomplementado. Sean $a, b \in L$ tal que $a \leq \neg b$ entonces

$$\begin{aligned} a \wedge b &\leq b \wedge \neg b \\ &= b \wedge \neg(b \wedge \neg 0) \\ &= b \wedge \neg\neg 0 \\ &= b \wedge 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, si $a \wedge b = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} a \wedge \neg b &= a \wedge \neg(a \wedge b) \\ &= a \wedge \neg 0 \\ &= a. \end{aligned}$$

Entonces $a \leq \neg b$. ■

La clase ecuacional definida en el teorema anterior, se denota por $\mathbf{B}_\omega$, y se denomina la *clase de retículos distributivos pseudocomplementados*. Observemos que la clase de las álgebras Boole es una subclase de $\mathbf{B}_\omega$, pues es inmediato que satisface las propiedades 1, 2, 3 y 4, y se denota por el símbolo $\mathbf{B_0}$.

Definición 3.3. Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Un elemento a es *denso* si $\neg a = 0$. El conjunto de todos los elementos densos será denotado por $D(L)$, es decir:

$$D(L) = \{a \in L : \neg a = 0\}.$$

Observemos que en todo retículo pseudocomplementado, y más generalmente en cualquier $\neg$-retículo, $D(L) \neq \emptyset$, pues $1 \in D(L)$. El conjuntos de los elementos densos juega un importante papel en estas álgebras, y será estudiado en más detalle en la siguiente sección. En adelante veremos algunas propiedades de las álgebras pseudocomplementadas.

Proposición 3.4. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado y sea P un filtro propio de L. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P es ultrafiltro.*

2. *P es filtro primo y se cumple $a \vee \neg a \in P$.*

3. *P es filtro primo y si $\neg\neg a \in P$ entonces $a \in P$.*

4. *P es filtro primo y $D(L) \subseteq P$.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Sea P un filtro maximal, veamos que P es filtro primo. Como además es propio, entonces $0 \notin P$. Luego por el Corolario 1.21 existe un filtro primo Q tal que $0 \notin Q$ y $P \subseteq Q$, y como P es maximal obtenemos que $P = Q$.

Supongamos que $a \notin P$, y consideremos el filtro generado por P y a, $[P \cup \{a\})$. Como $P \subseteq [P \cup \{a\})$ y P es maximal, deber ser $[P \cup \{a\}) = L$. Entonces el $0 \in [P \cup \{a\})$, y por definición, existe $f \in P$ tal que

$$f \wedge a = 0.$$

Entonces $f \leq \neg a \in P$. De manera análoga se prueba el otro caso. Por lo tanto, se concluye que $a, \neg a \in P$ y siendo P filtro obtenemos lo deseado.

$(2) \Rightarrow (3)$ Sea $\neg\neg a \in P$. Por hipótesis, $a \vee \neg a \in P$. Como P es primo entonces $a \in P$ o $\neg a \in P$. Si suponemos que $\neg a \in P$, entonces como P es filtro tenemos que $\neg a \wedge \neg\neg a = 0 \in P$. Por lo tanto debe ser $a \in P$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Sea $x \in D(L)$. Entonces $\neg x = 0$, y además

$$\neg\neg x = \neg 0 = 1 \in P.$$

Luego, aplicando la hipótesis, tenemos que $x \in P$.

$(4) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $P \subseteq F$ con F un filtro de L. Entonces existe un elemento $a \in F - P$. La Proposición 3.1 nos asegura que $\neg(a \vee \neg a) = 0$, por lo cual tenemos que $a \vee \neg a \in D(L) \subseteq P$. Como P es primo entonces

$$a \in P \text{ o } \neg a \in P.$$

Así, debe ser $\neg a \in P$. Como $P \subseteq F$, entonces $\neg a \in F$. Con ello, $a \wedge \neg a = 0 \in F$. Entonces $F = L$. ∎

Recordemos que para cada filtro F de un retículo distributivo podemos definir una relación de congruencia como

$$\Theta(F) = \{(a,b) \in L \times L : \exists u \in F \text{ tal que } a \wedge u = b \wedge u\}.$$

En el siguiente Lema mostrará que también $\Theta(F)$ es una congruencia para el caso de los retículos pseudocomplementados.

Lema 3.5. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado y F un filtro de L. Entonces*

$$\Theta(F) = \{(a,b) \in L \times L : \exists u \in F \textit{ tal que } a \wedge u = b \wedge u\}$$

es una relación de congruencia.

Demostración. Bastará ver que para todo $(a,b) \in \Theta(F)$, se cumple que

$$(\neg a, \neg b) \in \Theta(F).$$

Si $(a,b) \in \Theta(F)$, entonces existe $u \in F$ tal que $a \wedge u = b \wedge u$. Luego

$$a \wedge u \wedge \neg b = b \wedge u \wedge \neg b$$

y

$$a \wedge u \wedge \neg b = 0.$$

Por definición de pseudocomplemento, tenemos

$$u \wedge \neg b \leq \neg a,$$

y

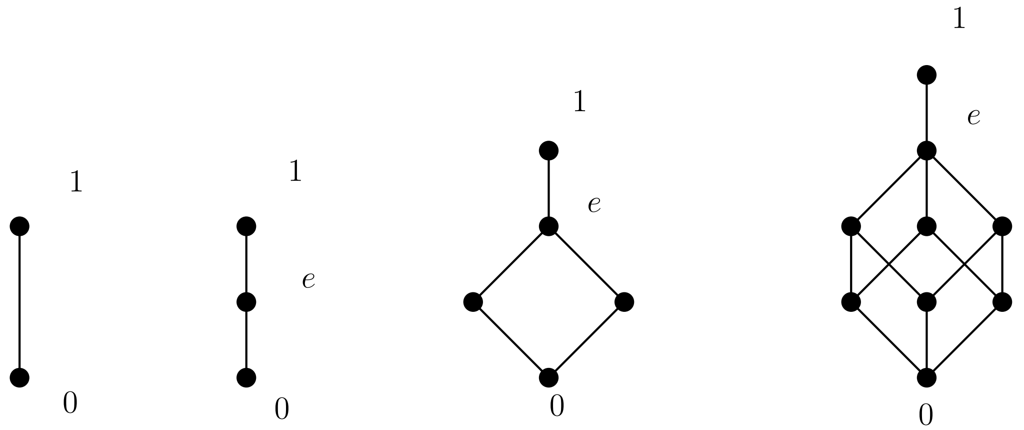
$$u \wedge \neg b \leq u \wedge \neg a.$$

De manera análoga, podemos obtener que

$$u \wedge \neg a \leq u \wedge \neg b.$$

Luego $u \wedge \neg a = u \wedge \neg b$, y por lo tanto $(\neg a, \neg b) \in \Theta(F)$. ∎

A continuación, caracterizaremos a las álgebras subdirectamente irreducibles para los retículos pseudocomplementados. Veremos que para los casos finitos el retículo adquiere las siguientes estructuras según su cardinalidad como muestra la siguiente figura:



Teorema 3.6. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Entonces L es subdirectamente irreducible si y sólo si $L = L_1 \bigoplus 1$, siendo L_1 un álgebra de Boole.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $L = L_1 \bigoplus 1$. Denotemos e al último elemento de L_1 y veamos que L es subdirectamente irreducible. Siendo que $e < 1$, entonces la congruencia dada por $\Theta([e))$ es no trivial. Queremos probar que $\Theta([e))$ es la menor congruencia en L, es decir, si Θ es otra congruencia, no trivial, en L probaremos que $\Theta([e)) \subseteq \Theta$.

Sea $(u, v) \in \Theta([e))$ con $u \neq v$. Entonces

$$u \wedge e = v \wedge e,$$

es decir,

$$e \leq u \text{ y } e \leq v,$$

lo que podemos asumir que

$$u = e \text{ y } v = 1.$$

Por otro lado, siendo que Θ es no trivial, existe por lo menos un par $(x, y) \in \Theta$ con $x \neq y$. Consideremos que $x \nleq y$ y analicemos por casos. Si $x = 1$ e $y = e$, entonces inmediatamente tenemos que $(v, u) \in \Theta$. Si $x = 1$ e $y \neq e$, entonces

$$(v, x) \in \Theta \text{ y } (x, y) \in \Theta,$$

y por transitividad

$$(v, y) \in \Theta.$$

Así

$$(v, u) = (v, e) = (v, e \vee y) = (v \vee u, y \vee u) \in \Theta.$$

Finalmente, si $x, y \leq e$, consideramos $\neg_{L_1} x$ y $\neg_{L_1} y$ como los complementos de x e y en L_1, entonces

$$(x \wedge \neg_{L_1} y, y \wedge \neg_{L_1} y) = (x \wedge \neg_{L_1} y, 0) \in \Theta.$$

Luego

$$(\neg(x \wedge \neg_{L_1} y), \neg 0) = (\neg(x \wedge \neg_{L_1} y), 1) \in \Theta,$$

siendo que $x \neq y$, $x \wedge \neg_{L_1} y \neq 0$ lo cual $x \wedge \neg_{L_1} y \in L_1$. Concluimos que

$$(u, v) = (e, 1) = (e, 1) \vee (\neg(x \wedge \neg_{L_1} y), 1) \in \Theta.$$

$(\Rightarrow)$ Sea L subdirectamente irreducible y denotemos por Θ_0, a la menor congruencia no trivial. Entonces existe dos elementos p y q distintos tal que $(p, q) \in \Theta$. Asumamos que $p < q$. Si suponemos que $q < 1$, entonces la congruencia dada por $\Theta([q))$ es no trivial y luego

$$(p, q) \in \Theta_0 \subseteq \Theta([q)).$$

Entonces $q < p$, llegando a un absurdo. Por lo tanto debe ser $q = 1$.

Ahora supongamos que existe un elemento x tal que $p < x < 1$. Consideremos la congruencia $\Theta([x))$ que es no trivial y por definición

$$(p, 1) = (p, q) \in \Theta_0 \subseteq \Theta([x)),$$

es decir, $x \leq p$, lo cual es absurdo.

Supongamos que existen dos elementos x e y tales que

$$x \vee y = 1$$

con $x, y \neq 1$. Entonces

$$(p, 1) \in \Theta_0 \subseteq \Theta([x)) \text{ y } (p, 1) \in \Theta_0 \subseteq \Theta([y)),$$

y luego

$$p \wedge x = x \quad y \quad p \wedge y = y,$$

$$1 = x \vee y = (p \wedge x) \vee (p \wedge y) = p \wedge (x \vee y) = p \wedge 1 = p,$$

y es contradictorio, dado que $p < 1 = q$.

Hasta el momento podemos afirmar que

$$L = (p] \bigoplus 1.$$

Para finalizar la demostración tendremos que ver que $(p]$ es un álgebra de Boole. Recordemos que para cada elemento de L está definido su pseudocomplemento, por lo que bastará probar que

$$x \vee \neg x = p$$

para todo $x \in (p]$. Supongamos que

$$x \vee \neg x = s < p,$$

y consideremos la siguiente relación dada por

$$\Theta_1 = \Theta((p]) \cap \Theta([s)).$$

Veamos que es, en particular, es una relación de congruencia. Sea $(u, v) \in \Theta_1$ y supongamos que $(\neg u, \neg v) \notin \Theta((p])$, es decir,

$$\neg u \vee p \neq \neg v \vee p.$$

Entonces como $L = (p] \bigoplus 1$, podemos asumir entonces que $\neg u \vee p = 1$. Pero ya vimos anteriormente que el 1 es un elemento irreducible, entonces debe ser $\neg u = 1$, es decir, $u = 0$. Luego

$$(u, v) = (0, v) \in \Theta([s)).$$

Entonces

$$0 = 0 \wedge s = v \wedge s,$$

y por definición de pseudocomplemento,

$$v \leq \neg s.$$

Ahora, siendo que $\neg s = \neg(x \vee \neg x) = 0$, se concluye que $v = 0$ lo cual es absurdo. Por lo tanto Θ_1 es una relación de congruencia en L, y además es no trivial pues $(s, p) \in \Theta_1$ con $s \neq p$. Como

$$p \vee p \neq p \vee 1$$

tenemos que $(p, 1) \notin \Theta_1$, pero llegamos a una contradicción pues $\Theta_0 \not\subseteq \Theta_1$. ■

3.2. Elementos especiales

En esta sección vamos a estudiar tres tipos de elementos que podemos identificar en las p-álgebras, los elementos regulares, los elementos densos, los elementos complementados, y cómo es que se relacionan entre sí.

Definición 3.7. Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Un elemento a es *regular* si $a = \neg\neg a$. El conjunto de todos los elementos regulares será denotado por $R(L)$, es decir:

$$R(L) = \{a \in L : \neg\neg a = a\}.$$

Observemos que, en cualquier p-álgebra, $0 = \neg\neg 0$ y $1 = \neg\neg 1$, debido a que $\neg 0 = 1$, Proposición 3.1, y $\neg 1 = 0$, por definición de $\neg$-retículos. Por tanto, concluimos que $0, 1 \in R(L)$. Además, en cualquier álgebra de Boole se cumple la propiedad de la involución de la negación, es decir, la doble negación de un elemento es el mismo elemento. Por lo tanto el conjunto de los elementos regulares coincide con el retículo, es decir,

$$L = R(L).$$

Esto no es cierto en caso de un retículo pseudocomplementado.

Dada una p-álgebra L, vamos a definir ciertas operaciones auxiliares en el conjunto $R(L)$, el objetivo es darle estructura de álgebra a este conjunto. Para cada par $a, b \in R(L)$ definimos las siguientes operaciones binarias:

- $a \vee_R b = \neg\neg(a \vee b)$.
- $a \wedge_R b = a \wedge b$.

Lema 3.8. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado y sea $a \in L$. Entonces $a \in R(L)$ si y solo existe $b \in L$ tal que $a = \neg b$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $a \in R(L)$ entonces $\neg\neg a = a$. Si tomamos $\neg a = b$, entonces se cumple.

$(\Leftarrow)$ Sea $a = \neg b$, entonces

$$\neg\neg a = \neg\neg\neg b = \neg b = a.$$

Luego $a \in R(L)$.

■

Teorema 3.9. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. El conjunto $R(L)$ es un álgebra de Boole bajo las operaciones inducidas por el orden parcial de L. Las operaciones del retículo$\langle R(L), \vee_R, \wedge_R, \neg_R, 0_R, 1_R\rangle$ se definen como :*

- $a \vee_R b = \neg\neg(a \vee b)$.
- $a \wedge_R b = a \wedge b$.
- $0_R = 0$.
- $1_R = 1$.
- $\neg_R a = \neg a$.

Demostración. Veamos que las operaciones están bien definidas. Sea $a, b \in R(L)$. Como

$$a \vee_R b = \neg\neg(a \vee b),$$

entonces $a \vee_R b = \neg c$ con $c = \neg(a \vee b)$ y, por lo tanto, el lema anterior nos dice que $a \vee_R b \in R(L)$. Además, por 7 de la Proposición 3.1, es inmediato que ver que $a \wedge_R b \in R(L)$. Se concluye que $R(L)$ es efectivamente un retículo con las operaciones $\vee_R$ y$\wedge_R$, y acotado por 0_R y 1_R.

Veamos que $R(L)$ es un retículo Booleano. Si $a \in R(L)$ entonces tenemos que probar que $a \wedge_R \neg a = 0$ y $a \vee_R \neg a = 1$. Observemos que, por definición de pseudocomplemento, se tiene

$$a \wedge_R \neg a = a \wedge \neg a = 0.$$

Por otro lado,

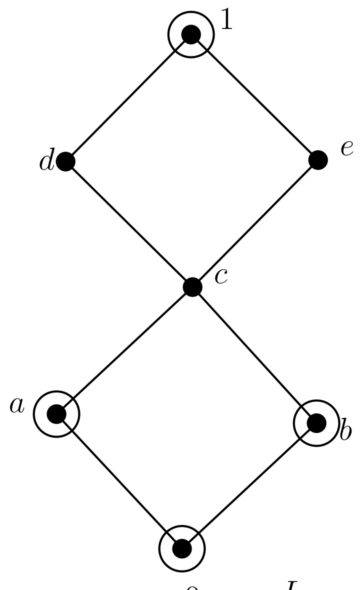
$$\begin{aligned} a \vee_R \neg a &= \neg\neg(a \vee \neg a) \\ &= \neg(\neg a \wedge \neg\neg a) \\ &= \neg(\neg a \wedge a) \\ &= \neg 0 = 1. \end{aligned}$$

■

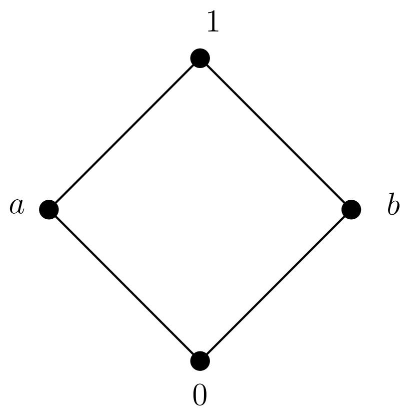
Ejemplo 3.1. Consideremos el retículo del Ejemplo 2.3. Identifiquemos el conjunto de elementos regulares como

$$R(L) = \{0, a, b, 1\},$$

siendo además fácil de comprobar que el conjunto de los elementos regulares corresponde a un álgebra de Boole de cuatro elementos.



L



$R(L)$

Definición 3.10. Sea L un retículo. Diremos que a es *complementado* si existe un elemento $b \in L$ tal que:

$$a \wedge b = 0 \text{ y } a \vee b = 1.$$

Denotaremos al *conjunto de elementos complementados* como $S(L)$.

Notemos que en una álgebra de Boole, L, todo elemento es complementado. Por lo tanto, tenemos que,

$$L = S(L) = R(L).$$

Ahora veremos que, en el caso de las retículos distributivos pseudocomplementados, el conjunto de los elementos complementados es una subálgebra de $R(L)$.

Lema 3.11. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Entonces*

1. $S(L) = \{x \in L : x \vee \neg x = 1\}$.

2. $S(L)$ *es una subálgebra de* $R(L)$.

Demostración. 1. Sea $a \in S(L)$ entonces existe b tal que

$$a \wedge b = 0,$$

entonces

$$b \leq \neg a.$$

De esta forma

$$1 = a \vee b \leq a \vee \neg a.$$

Luego $1 = a \vee \neg a$.

2. Sea $a \in S(L)$, entonces por lo probado anteriormente,

$$a \vee \neg a = 1.$$

Luego, siendo que $a \leq \neg\neg a$ y $\neg a \wedge \neg\neg a = 0$,

$$\begin{aligned} \neg\neg a &= \neg\neg a \wedge 1 \\ &= \neg\neg a \wedge (a \vee \neg a) \\ &= (\neg\neg a \wedge a) \vee (\neg\neg a \wedge \neg a) \\ &= a \vee 0 = a. \end{aligned}$$

Por lo tanto $a \in R(L)$. Claramente $0, 1 \in S(L)$. Además, si $a, b \in S(L)$ entonces

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee \neg(a \vee b) &= (a \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg b)\\ &= (a \vee b \vee \neg a) \wedge (a \vee b \vee \neg b)\\ &= (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1,\end{aligned}$$

entonces $a \vee b \in S(L)$. Y por otro lado

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge \neg(a \wedge b) &= (a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b)\\ &= (a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b)\\ &= (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0.\end{aligned}$$

Entonces $(a \wedge b) \wedge \neg(a \wedge b) = 0$, y

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee \neg(a \wedge b) &= (a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b)\\ &= (a \vee \neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a \vee \neg b)\\ &= (1 \vee \neg b) \wedge (1 \vee \neg a) = 1.\end{aligned}$$

Entonces $(a \wedge b) \vee \neg(a \wedge b) = 1$, por lo tanto $a \wedge b \in S(L)$. Por último,

$$\begin{aligned}\neg a \vee \neg\neg a &= \neg(a \wedge \neg a)\\ &= \neg 0 = 1.\end{aligned}$$

■

Veremos algunas caracterizaciones para el conjunto de los elementos densos definido anteriormente.

Lema 3.12. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Entonces*

1. *$D(L)$ es un filtro de L.*
2. *$a \vee \neg a \in D(L)$ para todo $a \in L$.*
3. *$D(L) \cap R(L) = \{1\}$.*
4. *$\Theta(D(L))$ es un congruencia de L.*

Demostración. 1. Es inmediato que $D(L) \neq \emptyset$, pues $1 \in D(L)$. Sean $a, b \in D(L)$, entonces

$$\neg a = 0 \text{ y } \neg b = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \wedge 1 \\ &= \neg\neg a \wedge \neg\neg b \\ &= \neg\neg(a \wedge b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\neg(a \wedge b) = 0$ y $a \wedge b \in D(L)$, es decir, $D(L)$ es cerrado bajo ínfimo. Sea $a \in D(L)$ y $a \leq b$ entonces

$$\neg b \leq \neg a = 0 \Rightarrow b = 0,$$

y luego $b \in D(L)$ y, con ello, $D(L)$ es creciente.

2. Observemos que dado $a \in L$

$$\neg(a \vee \neg a) = \neg a \wedge \neg\neg a = 0,$$

donde la última igualdad vale por 2 de la Proposición 3.1.

3. Supongamos que $x \in D(L) \cap R(L)$, entonces

$$\neg x = 0 \text{ y } \neg\neg x = x.$$

Luego $x = \neg 0 = 1$.

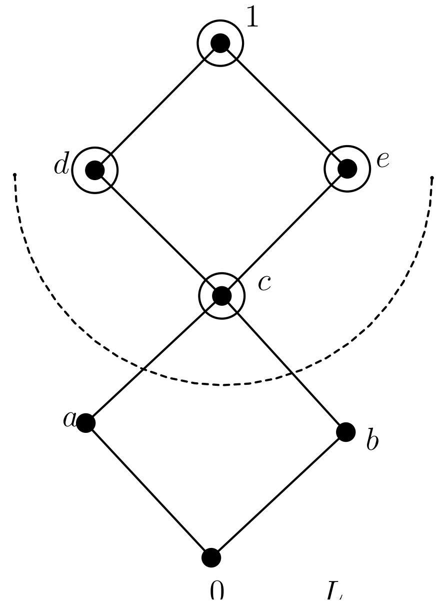
4. Es inmediato de 1.

■

Ejemplo 3.2. Consideremos el retículo del Ejemplo 3.1. Determinemos el conjunto de los elementos densos. Recordando que $D(L) = \{x \in L : \neg x = 0\}$ obtenemos que

$$D(L) = \{c, d, e, 1\},$$

que justamente coincide con el filtro generado por c, es decir, $D(L) = [c)$. Observemos que no necesariamente $D(L)$ es un filtro primo.



El siguiente resultado muestra la conexión entre el conjunto de los elementos regulares y el conjunto de los elementos densos.

Proposición 3.13. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Consideremos la aplicación*

$$\gamma : L \to R(L)$$

definida por

$$\gamma(a) = \neg\neg a.$$

Entonces γ es un $(0,1)$-homomorfismo y

$$R(L) \simeq L/\Theta(D(L)).$$

Demostración. Sea $a, b \in R(L)$ entonces,

$$\begin{aligned} \gamma(a \vee b) &= \neg\neg(a \vee b) \\ &= \neg\neg(\neg\neg a \vee \neg\neg b) \\ &= \neg\neg(\gamma(a) \vee \gamma(b)) \\ &= \gamma(a) \vee_R \gamma(b). \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando las identidades de la Proposición 3.1,

$$\begin{aligned} \gamma(a \wedge b) &= \neg\neg(a \wedge b) \\ &= \neg\neg a \wedge \neg\neg b \\ &= \gamma(a) \wedge \gamma(b) \\ &= \gamma(a) \wedge_R \gamma(b). \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene también que $\gamma(0) = \neg\neg 0 = 0$ y $\gamma(1) = \neg\neg 1 = 1$. Además,

$$\begin{aligned}\gamma(\neg a) &= \neg\neg(\neg a)\\ &= \neg(\neg\neg a)\\ &= \neg\gamma(a),\end{aligned}$$

lo cual concluimos que γ es efectivamente un $(0,1)$-homomorfismo. Ahora sea $w \in R(L)$, por que se cumple que $w = \neg\neg w$ y con ello $\gamma(w) = \neg\neg w = w$. Así γ es sobreyectiva.

Para probar que $R(L) \simeq L/\Theta(D(L))$ tan sólo tendremos que ver que el núcleo de la aplicación γ es el conjunto $\Theta(D(L))$, y con ello el Primer Teorema del Isomorfismo nos asegura el isomorfismo. Sea $(x,y) \in \Theta(D(L))$. Entonces existe $z \in D(L)$ tal que

$$x \wedge z = y \wedge z.$$

Como $\neg z = 0$, entonces $\neg\neg z = 1$ y luego

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \neg\neg x = \neg\neg x \wedge \neg\neg z\\ &= \neg\neg(x \wedge z) = \neg\neg(y \wedge z)\\ &= \neg\neg y \wedge \neg\neg z = \neg\neg y\\ &= \gamma(y),\end{aligned}$$

concluimos que $(x,y) \in Ker(\gamma)$. Recíprocamente, sea $(x,y) \in Ker(\gamma)$. Entonces

$$\gamma(x) = \gamma(y) \Leftrightarrow \neg\neg x = \neg\neg y \Leftrightarrow \neg x = \neg y.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}x \wedge (x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg y) &= x \wedge (y \vee \neg y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)\\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg x)\\ &= (x \wedge y) \vee 0 = (x \wedge y) \vee (y \wedge \neg y)\\ &= y \wedge (x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg y),\end{aligned}$$

siendo que $(x \vee \neg x), (y \vee \neg y) \in D(L)$, por Proposición 3.1, y además que $D(L)$ es filtro obtenemos que $(x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg y) \in D(L)$. Luego $(x,y) \in \Theta(D(L))$. ■

3.3. Subclases ecuacionales

Presentaremos una breve descripción acerca de unas subclases ecuacionales de los retículos pseudocomplementados. Como hemos mencionado anteriormente, las álgebras pseudocomplementas admiten una definición por medio de ecuaciones, y por lo tanto forman una variedad o clase ecuacional de álgebras. Además, hemos definido con anterioridad las álgebras de Stone las cuales satisfacen la identidad de Stone:

$$\neg a \vee \neg\neg a = 1.$$

Estas álgebras forman una clase ecuacional de la clase $\mathbf{B}_\omega$ y la denotamos a esta clase como $\mathbf{B}_1$. La identidad de Stone admite una generalización gracias a los trabajos de K. B. Lee [11], como sigue:

$$\neg(x_1 \wedge x_2) \vee \neg(\neg x_1 \wedge x_2) \vee \neg(x_1 \wedge \neg x_2) = 1 \qquad (L_2),$$

$$\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee \neg(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee \neg(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) = 1 \qquad (L_3),$$

y, generalizando,

$$\neg(x_1 \wedge ... \wedge x_n) \vee \neg(\neg x_1 \wedge ... \wedge x_n) \vee \ldots \vee \neg(x_1 \wedge ... \wedge \neg x_n) = 1 \qquad (L_n).$$

Observemos que para el caso L_1 es la identidad de Stone.

Lema 3.14. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *L satisface la identidad (L_n).*

(2) *Si $x_i \wedge x_j = 0$ para todo $i, j = 0, ..., n$ y $i \neq j$, entonces*

$$\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee ... \vee \neg x_n = 1.$$

(3) *Si $x_i \wedge x_j = 0$ para todo $i, j = 0, ..., n$, $i \neq j$, y $x_0, ..., x_n \in R(L)$, entonces*

$$\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee ... \vee \neg x_n = 1.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $x_0, ..., x_n \in L$ tal que $x_i \wedge x_j = 0$ para todo $i, j = 0, ..., n$ y $i \neq j$. Por definición de pseudocomplemento tenemos que

$$x_i \leq \neg x_j$$

para todo $i, j = 0, ..., n$ e $i \neq j$. Entonces

$$x_0 \leq \neg x_1 \wedge ... \wedge \neg x_n$$

$$x_1 \leq \neg\neg x_1 \wedge ... \wedge \neg x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n \leq \neg x_1 \wedge ... \wedge \neg\neg x_n.$$

Aplicando 3 de la Proposición 3.1 y la hipótesis

$$\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee ... \vee \neg x_n \geq \neg(\neg x_1 \wedge ... \wedge \neg x_n) \vee \neg(\neg\neg x_1 \wedge ... \wedge \neg x_n) \vee ... \vee \neg(\neg x_1 \wedge ... \wedge \neg\neg x_n) = 1.$$

Luego $\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee ... \vee \neg x_n = 1$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Es inmediato, usando que la propiedad 5 de la Proposición 3.1y el hecho que $\neg\neg x \in R(L)$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Sea $x_1, ..., x_n \in L$. Definimos los elementos $y_0, ..., y_n \in L$ como sigue

$$y_0 = x_1 \wedge ... \wedge x_n$$

$$y_1 = \neg x_1 \wedge ... \wedge x_n$$

$$\vdots$$

$$y_n = x_1 \wedge ... \wedge \neg x_n.$$

Teniendo en cuenta que para cualquier elemento arbitrario $a \in L$, $a \wedge \neg a = 0$ entonces

$$y_i \wedge y_j = 0$$

para todo $i, j = 0, ..., n$ y $i \neq j$. Por otro lado, $\neg\neg y_0, ..., \neg\neg y_n \in R(L)$. Aplicando la hipótesis a los elementos $\neg\neg y_0, ..., \neg\neg y_n$ obtenemos que:

$$\neg\neg\neg y_0 \vee ... \vee \neg\neg\neg y_n = 1$$

$$\neg y_0 \vee ... \vee \neg y_n = 1,$$

que es la identidad L_n. ■

Lema 3.15. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *L satisface la identidad (L_n).*

(2) *Cada filtro primo está contenido en a lo sumo en n filtros maximales.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Supongamos que P es un filtro primo tal que existe G_i con $i = 0, ..., n$ filtros propios maximales distintos tales que

$$P \subseteq G_i.$$

Observemos que si $\bigcap_{j \neq i} G_j \subseteq G_i$, entonces necesariamente existe un $k \neq i$ tal que $G_k \subseteq G_i$ y por maximalidad $G_k = G_i$. Entonces para todo $i \in \{0, .., n-1\}$ definimos

$$a_i \in \bigcap_{j \neq i} G_j \backslash G_i.$$

Por hipótesis tenemos que

$$\neg(a_0 \wedge ... \wedge a_{n-1}) \vee \neg(\neg a_0 \wedge ... \wedge a_{n-1}) \vee \ldots \vee \neg(a_0 \wedge ... \wedge \neg a_{n-1}) = 1 \in P.$$

Como P es filtro primo entonces

$$\neg(a_0 \wedge ... \wedge a_{n-1}) \in P \text{ o } \neg(a_0 \wedge ... \wedge \neg a_i \wedge ... \wedge a_{n-1}) \in P.$$

Supongamos que $\neg(a_0 \wedge ... \wedge a_{n-1}) \in P \subseteq G_n$. Como $a_i \in \cap_{j \neq i} G_j \backslash G_i$, tenemos que $a_i \in G_n$ para todo $i \in \{0, .., n-1\}$. Siendo G_n filtro, entonces

$$a_0 \wedge ... \wedge a_{n-1} \in G_n,$$

y luego $(a_0 \wedge ... \wedge a_{n-1}) \wedge \neg(a_0 \wedge ... \wedge a_{n-1}) = 0 \in G_n$ lo cual es absurdo.

Supongamos que $\neg(a_0 \wedge ... \wedge \neg a_i \wedge ... \wedge a_{n-1}) \in F \subseteq G_i$. Como $a_i \in \cap_{j \neq i} G_j \backslash G_i$, tenemos que

$$a_0, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_{n-1} \in G_i \text{ y } a_i \notin G_i,$$

siendo G_i un filtro, $a_0 \wedge ... \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge ... \wedge a_{n-1} \in G_i$. Por otro lado, por la Proposición 3.4, G_i es primo y $a_i \vee \neg a_i \in G_i$, y con ello $\neg a_i \in G_i$, pues $a_i \notin G_i$. Entonces

$$(a_0 \wedge ... \wedge \neg a_i \wedge ... \wedge a_n) \wedge \neg(a_0 \wedge ... \wedge \neg a_i \wedge ... \wedge a_n) = 0 \in G_i,$$

y es contradictorio pues G_i es propio.

$(2) \Rightarrow (1)$ Supongamos que existen $a_1, ..., a_n \in L$ tal que

$$1 \not\leq \neg(a_1 \wedge ... \wedge a_n) \vee \neg(\neg a_1 \wedge ... \wedge a_n) \vee \ldots \vee \neg(a_1 \wedge ... \wedge \neg a_n).$$

Denotaremos $b_0 = (a_1 \wedge ... \wedge a_n)$, $b_1 = (\neg a_1 \wedge ... \wedge a_n)$, ..., $b_n = (a_1 \wedge ... \wedge \neg a_n)$. Por el Corolario 1.21, existe un filtro primo P tal que

$$\neg b_0 \vee \neg b_1 \vee \ldots \vee \neg b_n \notin P,$$

y siendo P creciente, debe ser $\neg b_0, \neg b_1, ..., \neg b_n \notin P$. Consideramos los filtros generados por P y b_i, $[P \cup \{b_i\})$. Si suponemos que $0 \in [P \cup \{b_i\})$ entonces existe un $f \in P$ tal que $f \wedge b_i = 0$. Luego por definición de p-álgebra, $f \leq \neg b_i \in P$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, cada filtro, $[P \cup \{b_i\})$, son filtros propios. Entonces podemos definir, por medio del Lema de Zorn 1.19, $n + 1$ filtros maximales que los contengan, es decir, $[P \cup \{b_i\}) \subseteq G_i$ con G_i filtros maximales propios. Si suponemos que $G_i = G_j$, entonces $b_i = (a_0 \wedge ... \wedge \neg a_i \wedge ... \wedge a_n) \in G_j$ y también $b_j = (a_0 \wedge ... \wedge \neg a_j \wedge ... \wedge a_n) \in G_j$. Con ello

$$\neg a_i \wedge a_i = 0 \in G_j,$$

lo cual llegamos a un absurdo. ■

De esta manera, se define para todo $n \geq 1$ las clases de retículos pseudocomplementados que satisfacen la identidad (L_n), y las denotamos como $\mathbf{B_n}$. Además, si dado un retículo pseudocomplementado L que satisface identidad L_n, entonces, por el Lema 3.14, también cumplirá la identidad L_{n+1}. Por lo que deducimos que $\mathbf{B_n} \subseteq \mathbf{B_{n+1}}$ para todo n natural. Además es claro ver por su definición que las álgebras de Boole satisfacen el Lema 3.14, y de ahí se deduce que $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B_1} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{B_n}$ para todo n natural.

Por otro lado, el Lema 3.15 nos permite afirmar que las álgebras siguen una inclusión estricta. No nos olvidemos también de que nuestro estudio comenzó con los $\neg$-retículos, que son otra clase de álgebras, denotada como $\mathbf{N}$, que por lo que hemos visto contiene a todas las álgebras con una operación de negación. De esta manera tenemos una cadena de subclases de álgebras como sigue:

$$\mathbf{B_0} \subset \mathbf{B_1} \subset \ldots \subset \mathbf{B_n} \subset \mathbf{B_{n+1}} \subset \ldots \subset \mathbf{B}_\omega \subset \ldots \subset \mathbf{N}.$$

Representa una secuencia estrictamente creciente de subclases ecuacionales de álgebras para los retículos distributivos pseudocomplementados y los retículos de negación. Además, hemos definido el dual de $\mathbf{N}$ como $\Sigma(L)$, lo que llegamos a concluir que el dual cualquier clase ecuacional $\mathbf{B_n}$ cumple con la condición adicional de que cada filtro primo o elemento del dual está contenido en a lo sumo n filtros maximales o elementos maximales de X.

3.4. Caracterización algebraica

En esta sección vamos a caracterizar ciertas ecuaciones donde interviene la negación por medio de condiciones de primer orden definidas en el $\neg$-marco asociado al $\neg$-retículo. Estas caracterizaciones nos permitirán responder cuando un $\neg$-retículo deviene en un p-álgebra o un álgebra de Stone. Los resultados se pueden encontrar en el artículo [6].

Proposición 3.16. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ un $\neg$-retículo y sea $\langle X(L), \subseteq, R_\neg\rangle$ el $\neg$-marco asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $a \wedge \neg a = 0$.
2. *Si $a \leq \neg b$, implica que $a \wedge b = 0$.*
3. *$R_\neg$ es reflexiva.*
4. *Si $P \subseteq Q$, entonces $(P, Q) \in R_\neg$.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Sea $a \leq \neg b$, entonces $a \wedge \neg b = a$. Luego

$$a \wedge \neg b \wedge b = a \wedge b = 0.$$

$(2) \Rightarrow (3)$ Sea $P \in X(L)$. Sea $\neg a \in P$. Como $\neg a \leq \neg a$, por hipótesis, obtenemos que

$$\neg a \wedge a = 0 \notin P.$$

Entonces $a \notin P$. Luego $(P, P) \in R_\neg$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Sean $P, Q \in X(L)$ tal que $P \subseteq Q$. Si $\neg a \in P$ veamos que $a \notin Q$. Como $\neg a \in P \subseteq Q$ y $R_\neg$ es reflexiva entonces $a \notin Q$.

$(4) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $\neg a \wedge a \neq 0$. Entonces, por el Corolario 1.21, existe un filtro $P \in X(L)$ tal que

$$\neg a \wedge a \in P.$$

Se sigue que

$$\neg a \wedge a \leq a \in P \text{ y } \neg a \wedge a \leq \neg a \in P.$$

Como $P \subseteq P$ entonces por hipótesis $(P, P) \in R_\neg$, que es una contradicción. ■

Las propiedades siguientes son válidas para cualquier p-álgebra (ver Proposición 3.1).

Teorema 3.17. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ un $\neg$-retículo y sea $\langle X(L), \subseteq, R_\neg\rangle$ el $\neg$-marco asociado.*

1. $\neg(a \wedge \neg a) = 1$ *es válida si y sólo si* $(P, Q) \in R_\neg$ *entonces* $(Q, Q) \in R_\neg$.
2. $a \wedge \neg(a \wedge b) \leq \neg b$ *es válida si y sólo si* $(P, Q) \in R_\neg$ *entonces existe* $Z \in X(L)$ *tal que* $P \subseteq Z$ *,* $Q \subseteq Z$ *y* $(P, Z) \in R_\neg$.
3. $a \wedge \neg a \leq \neg b$ *es válida si y sólo si* $(P, Q) \in R_\neg$ *implica que* $(P, P) \in R_\neg$.
4. $a \leq \neg\neg a$ *es válida si y sólo si* $R_\neg$ *es simétrica.*
5. $\neg 1 = 0$ *es válida si y sólo si* $R_\neg$ *es serial, es decir,* $R_\neg(P) \neq \emptyset$.
6. $\neg a \vee \neg\neg a = 1$ *es válida si y sólo si* $R_\neg$ *es euclidiana, es decir,* $R_\neg$ *cumple la condición* $R_\neg^{-1} \circ R_\neg \subseteq R_\neg$.

Demostración. (1) $(\Rightarrow)$ Sea P y Q filtros primos tal que $(P, Q) \in R_\neg$. Supongamos que $(Q, Q) \notin R_\neg$, entonces existe $a \in Q$ y $\neg a \in Q$. Como Q es filtro, $a \wedge \neg a \in Q$. Por otro lado, por hipótesis podemos escribir

$$1 = \neg(a \wedge \neg a) \in P,$$

pero entonces $(a \wedge \neg a) \in \neg^{-1}(P) \cap Q$ lo cual es absurdo.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que existe un $a \in L$ tal que $1 \nleq \neg(a \wedge \neg a)$. Por el Corolario 1.21, existe $P \in X(L)$ tal que $\neg(a \wedge \neg a) \notin P$. Por Lema 2.4 existe $Q \in X(L)$ tal que $a \wedge \neg a \in Q$ y $(P, Q) \in R_\neg$. Luego, por hipótesis $(Q, Q) \in R_\neg$ pero, por otro lado, tenemos que $a \wedge \neg a \leq a, \neg a \in Q$ lo que es absurdo, pues $\neg^{-1}(Q) \cap Q = \emptyset$.

$(2)(\Rightarrow)$ Sea $(P, Q) \in R$ y consideramos $[P \cup Q)$. Observemos que $0 \notin [P \cup Q)$, pues si $0 \in [P \cup Q)$ entonces existe $a \in P$ y $b \in Q$ tal que

$$a \wedge b = 0,$$

entonces

$$\neg(a \wedge b) = \neg 0 = 1.$$

Luego

$$a \wedge \neg(a \wedge b) = a \in P,$$

y por hipótesis tendríamos que $\neg b \in P$, pero es absurdo dado que $b \in Q$ y también $(P, Q) \in R$. Entonces $[P \cup Q)$ es efectivamente un filtro. Ahora, siendo que $\neg 1 \notin P$ entonces $\neg^{-1}(P) \neq \emptyset$. Si suponemos que existe un elemento $a \in \neg^{-1}(P) \cap [P \cup Q)$, implica que existen otros dos elementos $b \in P$ y $c \in Q$ tal que

$$b \wedge c \leq a \text{ y } \neg a \in P,$$

entonces

$$\neg a \leq \neg(b \wedge c) \in P,$$

y luego aplicando nuevamente la hipótesis tenemos que

$$b \wedge \neg(b \wedge c) \leq \neg c \in P.$$

Con ello $c \in \neg^{-1}(P) \cap Q$ lo que es absurdo. Por lo tanto, $\neg^{-1}(P) \cap [P \cup Q) = \emptyset$, luego por Teorema del Filtro Primo 1.20 existe un $Z \in X(L)$ tal que

$$[P \cup Q) \subseteq Z \text{ y } \neg^{-1}(P) \cap Z = \emptyset.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b \in L$ tal que $a \wedge \neg(a \wedge b) \nleq \neg b$. Entonces por el Corolario 1.21 existe $P \in X(L)$ tal que

$$a \wedge \neg(a \wedge b) \in P \text{ y } \neg b \notin P,$$

por el Lema 2.4 existe un $Q \in X(L)$ tal que $b \in Q$ y $(P, Q) \in R_\neg$. Por hipótesis existe $Z \in X(L)$ tal que $P \subseteq Z$, $Q \subseteq Z$ y $(P, Z) \in R_\neg$. Entonces

$$a \wedge \neg(a \wedge b) \leq a \in P \subseteq Z \text{ y } b \in Q \subseteq Z,$$

lo cual podemos obtener que

$$a \wedge b \in Z,$$

y siendo que $a \wedge \neg(a \wedge b) \leq \neg(a \wedge b) \in P$, luego tenemos que

$$a \wedge b \in \neg^{-1}(P) \cap Z \neq \emptyset,$$

llegando a una contradicción.

(3)($\Rightarrow$) Sea $(P, Q) \in R_\neg$ y supongamos que $(P, P) \notin R_\neg$. Entonces existe un elemento $a \in L$ tal que $a \in P$ y $\neg a \in P$. Además, por ser P filtro también tenemos que $a \wedge \neg a \in P$. Por hipótesis

$$a \wedge \neg a \leq \neg b \in P \qquad (i)$$

para todo $b \in L$. Sea $q \in Q$. Por (i) tenemos que $\neg q \in P$, y luego $(P, Q) \notin R_\neg$ es absurdo.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que existe un elemento $a \in L$ tal que $a \wedge \neg a \nleq \neg b$. Entonces por el Corolario 1.21 existe un filtro primo P tal que $a \wedge \neg a \in P$ y $\neg b \notin P$. Aplicando el Lema 2.4 existe un $Q \in X(L)$ tal que

$$b \in Q \text{ y } (P, Q) \in R_\neg.$$

Luego por hipótesis tenemos $(P, P) \in R_\neg$. Por otro lado, como $a \wedge \neg a \in P$ también tenemos que $a, \neg a \in P$ lo cual es absurdo.

$(4)(\Rightarrow)$ Sea $(P, Q) \in R_\neg$ y supongamos que $R_\neg$ no es simétrica, es decir, $(Q, P) \notin R_\neg$. Entonces existe $a \in P$ y $\neg a \in Q$. Por hipótesis, $a \leq \neg\neg a \in P$. Luego, $\neg a \in \neg^{-1}(P) \cap Q \neq \emptyset$ contradice que $(P, Q) \in R_\neg$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $a \nleq \neg\neg a$. Por el Corolario 1.21 existe un $P \in X(L)$ tal que

$$a \in P \text{ y } \neg\neg a \notin P,$$

por el Lema 2.4 existe $Q \in X(L)$ tal que $\neg a \in Q$ y $(P, Q) \in R_\neg$. Por hipótesis $(Q, P) \in R_\neg$, pero $a \in \neg^{-1}(Q) \cap P \neq \emptyset$ llegando a una contradicción.

$(5)(\Rightarrow)$ Sea $P \in X(L)$. El elemento $1 \in P$ por ser filtro. Luego $\neg 1 = 0 \notin P$. Por Lema 2.4 existe $Q \in X(L)$ tal que $1 \in Q$ y $(P, Q) \in R_\neg$. Luego $Q \in R_\neg(P)$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\neg 1 \nleq 0$. Entonces, por el Corolario 1.21, existe $P \in X(L)$ tal que $\neg 1 \in P$. Por hipótesis, existe $Q \in X(L)$ tal que $\neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset$, es decir, $1 \notin Q$ lo cual es absurdo.

$(6)(\Rightarrow)$ Sea $(P, Q) \in R_\neg^{-1} \circ R_\neg$, entonces existe un filtro primo D tal que $(D, P) \in R_\neg$ y $(D, Q) \in R_\neg$, es decir, cumplen $\neg^{-1}(D) \cap P = \emptyset$ y $\neg^{-1}(D) \cap Q = \emptyset$. Sea $\neg a \in P$ entonces $\neg\neg a \notin D$. Por hipótesis $\neg a \vee \neg\neg a = 1 \in D$. Por propiedad de filtro primo, debe ser $\neg a \in D$. Luego $a \notin Q$, y, por lo tanto, $(Q, P) \in R_\neg$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\neg a \vee \neg\neg a \neq 1$, es decir, $1 \nleq \neg a \vee \neg\neg a$. Entonces por el Corolario 1.21 existe un $P \in X(L)$ tal que

$$\neg a \vee \neg\neg a \notin P,$$

y además, como $\neg a, \neg\neg a \leq \neg a \vee \neg\neg a \notin P$ entonces tenemos que $\neg a, \neg\neg a \notin P$.

Por el Lema 2.4 existen $Q, D \in X(L)$ tal que

$$a \in Q \text{ , } \neg a \in D \text{ , } (P, Q) \in R_\neg \text{ y } (P, D) \in R_\neg,$$

que es equivalente con lo siguiente

$$(D, Q) \in R_\neg^{-1} \circ R_\neg.$$

Aplicando la hipótesis obtenemos que $(D, Q) \in R_\neg$. Pero $a \in \neg^{-1}(D) \cap Q$, llegando a una contradicción. ■

Observemos que si L es un $\neg$-retículo podemos concluir lo siguiente:

1. Si $R_\neg$ es serial, por la Proposición 3.17, implica que se cumple $\neg 1 = 0$ y luego
$$\neg\neg 0 = \neg 1 = 0.$$

2. Si se cumple que si $(P, Q) \in R_\neg$ entonces existe $Z \in X(L)$ tal que $P \subseteq Z$, $Q \subseteq Z$ y $(P, Z) \in R_\neg$, por la Proposición 3.17, entonces vale que
$$a \wedge \neg(a \wedge b) \leq \neg b.$$
Luego
$$a \wedge a \wedge \neg(a \wedge b) = a \wedge \neg(a \wedge b) \leq a \wedge \neg b.$$
Como $a \wedge b \leq b$, entonces
$$a \wedge \neg b \leq a \wedge \neg(a \wedge b).$$
Se concluye que $a \wedge \neg(a \wedge b) = a \wedge \neg b$.

En otras palabras, si a un $\neg$-retículo, L, le exigimos que cumpla las condiciones 2 y 5 de la Proposición 3.17, podemos afirmar que L es un álgebra pseudocomplementa. Además, si pedimos que $R_\neg$ sea también euclediana, obtenemos que L es un álgebra de Stone.

3.5. Dualidad

El objetivo de esta sección es desarrollar una dualidad de tipo Priestley para el caso particular de las p-álgebras. Mostraremos que, haciendo uso del Teorema de

Representación 2.15, el dual de las retículos distributivos pseudocomplementadas se caracterizan por satisfacer que $(U]^c \in D(X)$ para cada $U \in D(X)$.

A continuación veremos un resultado de suma importancia que nos dice que la relación binaria $R_\neg$ del dual la podemos definir en función de la relación del orden o inclusión. En consecuencia, cuando desarrollaremos la dualidad para estas álgebras, no es necesario tener presente la relación binaria del dual.

Lema 3.18. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ una p-álgebra. Entonces para todo $P, Q \in X(L)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset$.

2. *Existe un filtro primo D tal que $P \subseteq D$ y $Q \subseteq D$.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Supongamos que para todo $D \in X(L)$ se tiene que $P \subseteq D$ y $Q \nsubseteq D$. Entonces existe $a \in Q$ y $a \notin D$. Con ello $a \notin P$. Si $\neg a \in P$ entonces, $\neg^{-1}(P) \cap Q \neq \emptyset$. Por lo tanto $\neg a \notin P$. Consideremos $[P \cup \{a\})$. Si $0 \in [P \cup \{a\})$ entonces existe un elemento $p \in P$ tal que $p \wedge a = 0$. Luego, por propiedad de p-álgebras, $p \leq \neg a \in P$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, $[P \cup \{a\})$ es propio, por lo que existe un W filtro primo que lo contiene. Luego $P \subseteq W$ y $a \in W$, llegando a una contradicción.

$(2) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $\neg^{-1}(P) \cap Q \neq \emptyset$. Entonces existe $z \in \neg^{-1}(P) \cap Q$, es decir,

$$\neg z \in P \text{ y } z \in Q.$$

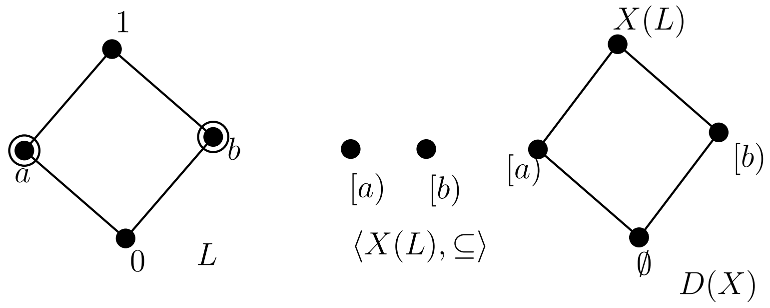
Por hipótesis, existe $D \in X(L)$ tal que $P \subseteq D$ y $Q \subseteq D$. Entonces $z, \neg z \in D$, y luego $z \wedge \neg z = 0 \in D$ contradice que D sea propio. ■

Ejemplo 3.3. En el Ejemplo 2.9, hemos mostrado que no es una p-ágebra. Comprobemos que la relación $R_\neg$ no cumple la condición anterior. En efecto,

$$\neg^{-1}([a)) = \{0\}$$

$$\neg^{-1}([a)) \cap [b) = \emptyset,$$

entonces $([a), [b)) \in R_\neg$. Sin embargo, no existe ningún filtro primo tal contenga a $[a)$ y $[b)$.



Teorema 3.19. *Sea L un retículo distributivo pseudocomplementado. Entonces para todo $U \in D(X(L))$ se cumple la siguiente propiedad*

$$\neg_{R_\neg} U = (U]^c.$$

Demostración. Recordemos que por el Teorema de Representación 2.15 existe un $\neg$-isomorfismo entre L y $D(X(L))$ por medio de la aplicación de Stone σ. Entonces si $U \in D(X(L))$, existe un $a \in L$ tal que $\sigma(a) = U$, es decir, bastará ver

$$\neg_{R_\neg}(\sigma(a)) = (\sigma(a)]^c,$$

que es lo mismo

$$\sigma(\neg a) = (\sigma(a)]^c.$$

($\subseteq$) Sea $P \in X(L)$ tal que $\neg a \in P$. Queremos ver que $P \notin (\sigma(a)]$. Supongamos que $P \in (\sigma(a)]$, entonces existe un $Q \in X(L)$ tal que

$$P \subseteq Q \text{ y } a \in Q.$$

Por inclusión, $\neg a \in P \subseteq Q$, entonces $a, \neg a \in Q$, y luego, por ser filtro, $a \wedge \neg a \in Q$, lo cual es absurdo dado que en toda p-álgebra se cumple que $a \wedge \neg a = 0$.

($\supseteq$) Sea $P \in (\sigma(a)]^c$, probemos que $P \in \sigma(\neg a)$, es decir, $\neg a \in P$. Supongamos que $\neg a \notin P$, entonces por el Lema 2.4 existe un $Q \in X(L)$ tal que $\neg a \in Q$ y $(P, Q) \in R_\neg$. Por el Lema 3.18, existe un filtro primo Z tal que

$$P \subseteq Z \text{ y } Q \subseteq Z,$$

y como $a \in Q$, entonces $Z \in \sigma(\neg a)$. Luego tenemos que

$$P \subseteq Z \text{ y } Z \in \sigma(a),$$

es decir, $P \in (\sigma(a)]$. ■

Teorema 3.20. *Sea $\langle X, \leq, \tau \rangle$ un espacio de Priestley. Si para todo $U \in D(X)$, $(U]^c$ es cerrado entonces $D(X)$ es una p-álgebra.*

Demostración. En principio recordemos que si $U \in D(X)$, entonces U es un abierto-cerrado creciente. Por la Proposición 2.10, sabemos que si U cerrado, entonces $(U]$ también es cerrado. Esto quiere decir $(U]^c$ es un abierto creciente y como $(U]^c$ es cerrado por hipótesis. Entonces $(U]^c \in D(X)$. Por lo tanto definimos la negación en $D(X)$ como sigue:

$$\neg U = (U]^c$$

para todo $U \in D(X)$. Bastará probar que $\langle D(X), \cup, \cap, \neg, \emptyset, X \rangle$ es una p-álgebra. Observemos que

$$\neg\emptyset = (\emptyset]^c = \emptyset^c = X.$$

Sea $U, V \in D(X)$

$$\neg(U \cup V) = (U \cup V]^c = ((U] \cup (V])^c = (U]^c \cap (V]^c = \neg U \cap \neg V.$$

Veamos que para todo $U, V \in D(X)$ se cumple

$$U \cap V = \emptyset \Leftrightarrow U \subseteq \neg V.$$

($\Rightarrow$) Vamos a ver que $(V] \subseteq U^c$, y con ello $U \subseteq (V]^c$. Sea $x \in (V]$. Entonces existe un $y \in X$ tal que $x \leq y$ e $y \in V$. Por hipótesis $V \subseteq U^c$ y por lo tanto $y \in U^c$. Luego como U^c es decreciente y $x \leq y$ se sigue que $x \in U^c$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe un $z \in U \cap V$. Por definición de intersección y por la hipótesis tenemos que

$$z \in V \text{ y } z \in (V]^c.$$

Como $z \notin (V]$, entonces para todo $x \in X$ tal que $z \leq x$ tenemos que $x \notin V$. Si consideramos que $z \leq z$ entonces hay una contradicción, pues dado que $z \in V$. ■

Corolario 3.21. *Sea L un retículo distributivo. L es un retículo pseudocomplementado si y sólo si $(U]^c \in D(X(L))$ para cada $U \in D(X(L))$.*

Por último, daremos una caracterización de las congruencias. Recordemos que hemos vistos que para cualquier $\neg$-retículos cada congruencia le corresponde un cerrado R-saturado, estableciendo un antisomorfismo de retículos. Para el caso de retículos pseudocomplementados, un subconjunto cerrado, Y, es R-saturado equivale a la siguiente condición:

$$Max\, X(L) \cap [Y) \subseteq Y.$$

Proposición 3.22. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ una p-álgebra. Entonces para todo subconjunto $Y \subseteq X(L)$ cerrado se cumple:*

$$Max\, X(L) \cap R_{\neg}(P) = Max\, X(L) \cap [P).$$

Demostración. $(\subseteq)$ Sea $Q \in Max\, X(L) \cap R_{\neg}(P)$. Entonces $\neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset$. Por Lema 3.18 existe un filtro primo D tal que $P \subseteq D$ y $Q \subseteq D$. Como Q es maximal en $X(L)$ entonces debe ser $Q = D$. Por lo tanto, $P \subseteq Q$ y por definición tenemos que $Q \in [P)$.

$(\supseteq)$ Sea $Q \in Max\, X(L) \cap [P)$, entonces $P \subseteq Q$ y trivialmente $Q \subseteq Q$. Por el Lema 3.18, $Q \in R_{\neg}(P)$. ■

De esta manera, se sigue del Teorema 2.27 el siguiente resultado.

Corolario 3.23. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ una p-álgebra. Entonces el retículo de las congruencias, $Con(L, \neg)$, es isomorfo al dual del retículos de los conjuntos cerrados tal que para todo $Y \subseteq X(L)$ cerrado se cumple:*

$$Max\, X(L) \cap [Y) \subseteq Y.$$

Capítulo 4

Álgebras de Stone

En este capítulo vamos a estudiar en mayor profundidad las álgebras de Stone y determinaremos la dualidad topológica como lo hicimos para las p-álgebras. Una ampliación de la teoría de las álgebras de Stone se encuentra en [2] y [10].

4.1. Propiedades y caracterizaciones

En esta sección veremos algunos ejemplos de las álgebras de Stone y además caracterizaremos por medio de los conjuntos de los elementos regulares, de los elementos complementados.

Ejemplo 4.1. Sea L un retículo totalmente ordenado, es decir, una cadena. Sea $\neg a = 0$ si $a \neq 0$ y $\neg 0 = 1$. Entonces L es un álgebra de Stone. En efecto, sea $a \neq 0$

$$\neg\neg 0 \vee \neg 0 = \neg 1 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$$

$$\neg\neg a \vee \neg a = \neg 0 \vee 0 = 1 \vee 0 = 1.$$

Ejemplo 4.2. Sea L es un retículo denso, es decir, $L = D(L) \cup \{0\}$. Entonces L es un álgebra de Stone.

Ejemplo 4.3. Sea L un retículo Booleano completo. Consideremos el retículo de ideales como vimos en el Ejemplo 2.6. Para cada $I \in Id(L)$, sea

$$a = \bigvee \{x \in L : i \in I\}.$$

Entonces

$$I^* = \{x \in L : x \wedge i = 0 \ \forall i \in I\} = (a].$$

Luego

$$I^* \vee I^{**} = (a] \vee (\neg a] = L,$$

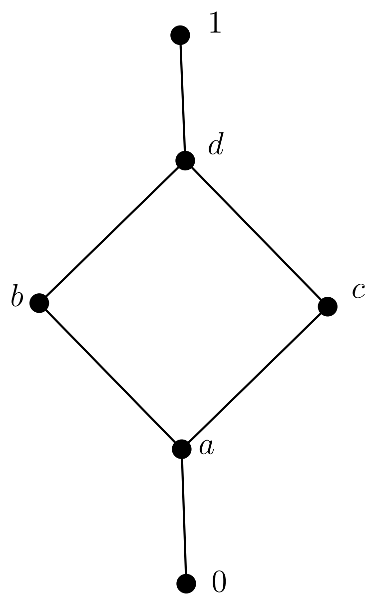
por lo que es también un álgebra de Stone.

Ejemplo 4.4. Sea L un retículo Booleano. Definimos el retículo como en el Ejemplo 2.8. Veamos que si $a, b \in L$ con $a \leq b$,

$$\begin{aligned}
\neg\neg(a,b) \vee \neg(a,b) &= \neg(\neg b, \neg b) \vee (\neg b, \neg b) \\
&= (b,b) \vee (\neg b, \neg b) \\
&= (b \vee \neg b, b \vee \neg b) \\
&= (1,1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto también es un álgebra de Stone.

Ejemplo 4.5. Consideremos el siguiente retículo distributivo finito pseudocomplementado.



Veamos que efectivamente es un álgebra de Stone. Como es un retículo finito podemos calcular el pseudocomplemento de cada elemento mediante

$$\neg a = \bigvee \{b \in L : a \wedge b = 0\}.$$

Entonces tenemos que

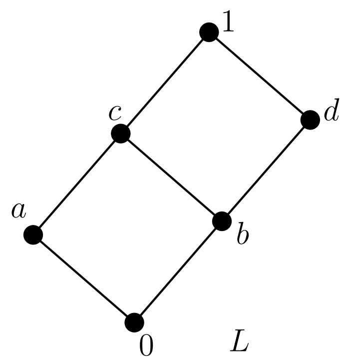
$$\neg a = \bigvee\{0\} = 0\,, \neg b = \bigvee\{0\} = 0\,, \neg c = \bigvee\{0\} = 0\,, \neg d = \bigvee\{0\} = 0.$$

Luego veamos que

$$\neg\neg a \vee \neg a = \neg 0 \vee 0 = 1 \vee 0 = 1,$$

de manera análoga con todos los demás elementos.

Ejemplo 4.6. Consideremos el retículo distributivo finito pseudocomplementado de la siguiente figura.



Veamos que también es una álgebra de Stone. Entonces

$$\neg a = \bigvee\{0, b, d\} = d\,,\ \neg b = \bigvee\{0, a\} = a\,,\ \neg c = \bigvee\{0\} = 0\,,\ \neg d = \bigvee\{a\} = a,$$

y luego podemos verificar la propiedad de Stone:

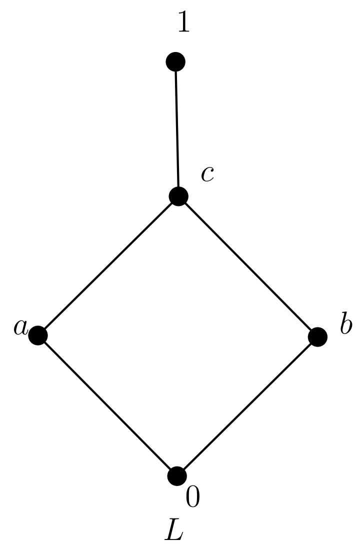
$$\neg\neg a \vee \neg a = \neg d \vee d = a \vee d = 1$$

$$\neg\neg b \vee \neg b = \neg a \vee a = d \vee a = 1$$

$$\neg\neg c \vee \neg c = \neg 0 \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$$

$$\neg\neg d \vee \neg d = \neg a \vee a = d \vee a = 1.$$

Ejemplo 4.7. Consideremos el siguiente retículo de la figura.



Determinemos los pseudocomplementos de a y b

$$\neg a = \bigvee\{0, b\} = b\ , \neg b = \bigvee\{0, a\} = a.$$

Luego

$$\neg\neg a \vee \neg a = \neg b \vee b = a \vee b = c \neq 1,$$

por lo tanto, no es un álgebra de Stone.

Teorema 4.1. *Sea L una p-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalente:*

1. *L es una álgebra de Stone.*

2. *$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.*

3. *$\neg\neg(a \vee b) = \neg\neg a \vee \neg\neg b$.*

4. *$R(L)$ es una subálgebra de Stone de L.*

5. *$R(L) = S(L)$.*

6. *Cada filtro primo en L está contenido en un único ultrafiltro.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $a, b \in L$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &= (a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) \\ &= (b \wedge 0) \vee (a \wedge 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por definición de p-álgebra, obtenemos que

$$\neg a \vee \neg b \leq \neg(a \wedge b).$$

Supongamos que existe un $x \in L$ tal que

$$x \wedge (a \wedge b) = 0.$$

En particular, $(x \wedge b) \wedge a = 0$ y, por definición de p-álgebra, $(x \wedge b) \leq \neg a$. Luego

$$x \wedge b \wedge \neg\neg a \leq \neg a \wedge \neg\neg a = 0,$$

implica que $x \wedge \neg\neg a \leq \neg b$. Así

$$\begin{aligned} x &= x \wedge 1 \\ &= x \wedge (\neg a \vee \neg\neg a) \\ &= (x \wedge \neg a) \vee (x \wedge \neg\neg a) \\ &\leq (x \wedge \neg a) \vee \neg b \\ &\leq \neg a \vee \neg b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\neg(a \wedge b) \wedge (a \wedge b) = 0$, por definición de pseudocomplemento, entonces lo probado anteriormente nos dice que se cumple

$$\neg(a \wedge b) \leq \neg a \vee \neg b.$$

$(2) \Rightarrow (3)$ Sean $a, b \in L$. Entonces $\neg\neg(a \vee b) = \neg(\neg a \wedge \neg b)$. Luego, por hipótesis, $\neg\neg(a \vee b) = \neg\neg a \vee \neg\neg b$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Recordemos por el Teorema 3.9, la aplicación γ es un homomorfismo de p-álgebras. Sea $a \in L$. Como $\neg a = \neg\neg\neg a$ entonces $\neg\neg a = \neg\neg\neg\neg a$ y con ello $\neg\neg a \in R(L)$. Por otro lado, sean $a, b \in R(L)$

$$\begin{aligned} a \vee_R b &= \neg\neg(a \vee b) \\ &= \neg\neg a \vee \neg\neg b \\ &= a \vee b. \end{aligned}$$

Luego, como L es álgebra de Stone, $\neg a \vee \neg\neg a = 1$, entonces tenemos

$$\neg a \vee_R \neg\neg a = 1.$$

$(4) \Rightarrow (1)$ Sea $a \in L$. Entonces sabemos que $\neg\neg a \in R(L)$. Recordemos que en toda p-álgebra se cumple que $\neg a = \neg\neg\neg a$. Ahora, por hipótesis, sabemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \neg(\neg\neg a) \vee_R \neg\neg(\neg\neg a) \\ &= \neg a \vee_R \neg\neg a \\ &= \neg\neg\neg a \vee \neg\neg\neg\neg a \\ &= \neg a \vee \neg\neg a. \end{aligned}$$

$(1) \Rightarrow (5)$ Supongamos que L es un álgebra de Stone. Recordemos el Lema 3.11 los elementos complementados en toda p-álgebra están caracterizados por aquellos que cumplen la propiedad $a \vee \neg a = 1$. Sea $a \in S(L)$. Entonces, siendo que $a \leq \neg\neg a$, es decir, $\neg\neg a \wedge a = a$,

$$\begin{aligned} \neg\neg a &= \neg\neg a \wedge 1. \\ &= \neg\neg a \wedge (\neg a \vee a) \\ &= (\neg\neg a \wedge \neg a) \vee (\neg\neg a \wedge a). \\ &= 0 \vee a = a, \end{aligned}$$

y se concluye que $a \in R(L)$. Sea $a \in R(L)$. Entonces

$$\neg a \vee a = \neg a \vee \neg\neg a = 1.$$

$(5) \Rightarrow (1)$ Sea $a \in L$. Entonces $\neg\neg a \in R(L)$, y por hipótesis

$$\begin{aligned} 1 &= \neg\neg a \vee \neg(\neg\neg a) \\ &= \neg\neg a \vee \neg a. \end{aligned}$$

$(1) \Leftrightarrow (6)$ Se deduce del Lema 3.15. ■

Ejemplo 4.8. Consideremos los retículos del Ejemplo 4.6. Observemos que

$$R(L) = \{0, a, d, 1\} = S(L).$$

Veamos que $R(L)$ es una subálgebra.

$$a \wedge 0 = 0 \,,\, a \wedge a = a \,,\, a \wedge d = 0 \,,\, a \wedge 1 = a$$

$$a \vee 0 = a \,,\, a \vee a = a \,,\, a \vee d = 1 \,,\, a \vee 1 = 1$$

$$d \wedge 0 = 0 \,,\, d \wedge d = d \,,\, a \wedge d = 0 \,,\, d \wedge 1 = d$$

$$d \vee 0 = d \,,\, d \vee d = d \,,\, a \vee d = 1 \,,\, d \vee 1 = 1$$

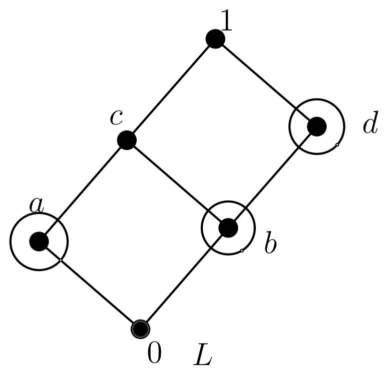
$$\neg 0 = 1 \; , \neg a = d \; , \neg d = a \; , \neg 1 = 0.$$

Analizamos por últimos la caracterización por filtros primos.

$$X(L) = \{[a) \; , [b) \; , [d)\},$$

$$Ul(L) = \{[a) \; , [b)\}.$$

Luego cada ultrafiltro o filtro primo maximal esta contenido únicamente consigo mismo únicamente y el filtro primo $[d)$ esta únicamente contenido por $[b)$.



Ejemplo 4.9. Consideremos el Ejemplo 4.7. Observemos que

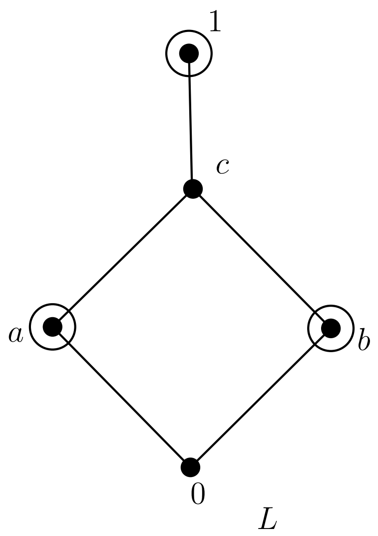
$$R(L) = \{0, a, b, 1\} \neq S(L) = \{0, 1\}.$$

Además, $R(L)$ no es subálgebra pues $a \vee b = c \notin R(L)$. Por otro lado,

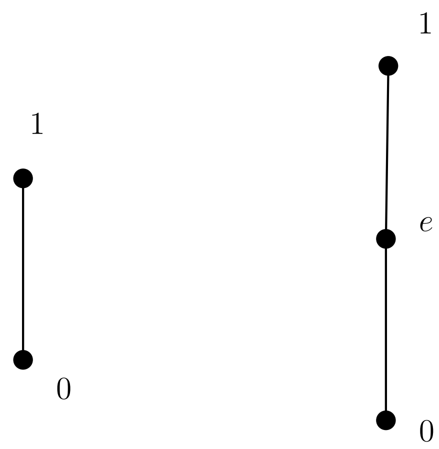
$$X(L) = \{[1), [a), [b)\},$$

$$Ul(L) = \{[a), [b)\}.$$

Vemos que $[1) \subseteq [a) \cap [b)$.



Para finalizar, determinemos cuáles son, para cualquier álgebra de Stone, las álgebras subdirectamente irreducibles. La respuesta es que son únicamente las siguientes:



Esto se debe a que, por el Teorema 3.6, las álgebras sudirectamente irreducibles en cualquier p-álgebra, en particular un álgebra de Stone, son:

$$L_1 \bigoplus 1,$$

con L_1 un álgebra de Boole. Ahora el conjunto $[1)$ es un filtro primo. Y, además, exigiendo $L_1 \bigoplus 1$ sea un álgebra de Stone, el filtro $[1)$ debe estar contenido en a lo sumo un filtro maximal (ver Teorema 4.1) y las únicas álgebras de Boole que tiene un único ultrafiltro son las cadenas. Por lo tanto, L_1 debe ser necesariamente una cadena, y, por ser L_1 álgebra de Boole, la cadena consta de uno o dos elementos.

4.2. Álgebras de Stone relativas

En esta sección estudiaremos a las llamadas *álgebras de Stone relativas*, que son una generalización de las álgebras de Stone, y veremos cómo dichas estructuras se relacionan entre sí. Dado cualquier retículo L, recordemos que podemos definir un subretículo para cada $a, b \in L$ tal que $a \leq b$

$$[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}.$$

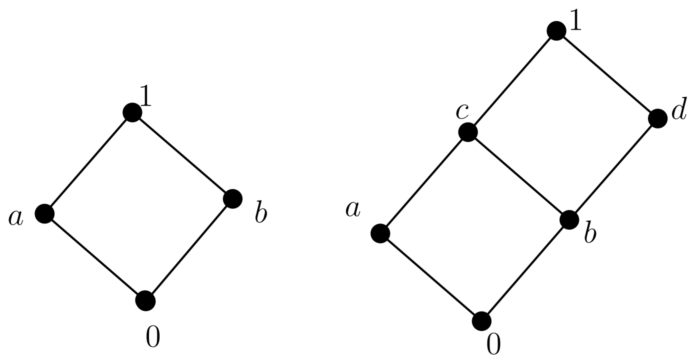
Esto nos permite introducir las álgebras de Stone relativas.

Definición 4.2. Sea L un retículo distributivo acotado. Diremos que L es una *álgebra de Stone relativa* si para cada $a, b \in L$ con $a \leq b$, cada subretículo $[a, b]$ es un álgebra de Stone.

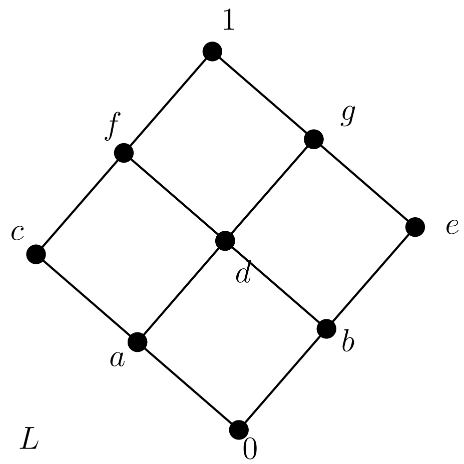
Obviamente toda álgebra de Stone relativa es particularmente un álgebra de Stone. Además, observemos que el primer elemento del álgebra es $0_{[a,b]} = a$ y el último es $1_{[a,b]} = b$.

Ejemplo 4.10. Toda cadena es una álgebra de Stone relativa.

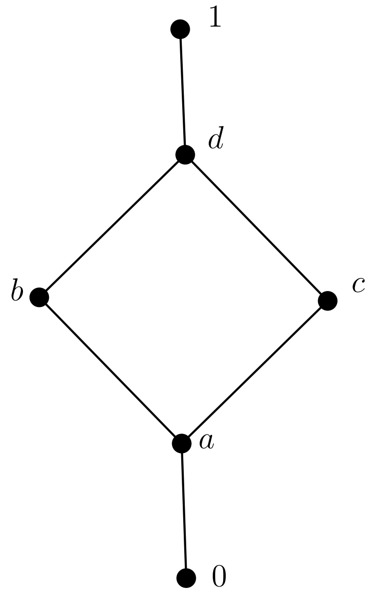
Ejemplo 4.11. Consideremos los retículos pseudocomplementados de la siguiente figura. Es sencillo ver que ambos son álgebras de Stone relativas.



Ejemplo 4.12. El siguiente retículo pseudocomplementado es un ejemplo no trivial de álgebra de Stone relativo.



Ejemplo 4.13. Consideremos el retículo pseudocomplementado de la siguiente figura.



En este caso es un álgebra de Stone, pero sin embargo no es un álgebra de Stone relativa. En efecto, tomemos el intervalo $[a, 1]$, ya hemos visto que $[a, 1]$ no es un álgebra de Stone (ver Ejemplo 4.7).

Estas álgebras pueden caracterizarse por medio del conjunto de los elementos densos, siendo un álgebra de Stone es también un álgebra de Stone relativa si el conjunto de los elementos densos es un álgebra de Stone relativa.

Teorema 4.3. *Sea L un retículo distributivo acotado. Si $[a)$ un álgebra de Stone para todo $a \in L$, entonces L es un álgebra de Stone relativa.*

Demostración. Sean $a, b \in L$ tal que $a \leq b$. Probemos primero que dado $x \in [a, b]$ el pseudocomplemento de x en $[a, b]$ es $u = (\neg_{[a)} x \wedge b) \vee a$. Es claro que $u \in [a, b]$. Por otra parte, usando que $a \leq x$ y $[a)$ es álgebra de Stone relativa,

$$\begin{aligned} x \wedge u &= x \wedge ((\neg_{[a)} x \wedge b) \vee a) \\ &= (x \wedge \neg_{[a)} x \wedge b) \vee (x \wedge a) \\ &= (a \wedge b) \vee a = a. \end{aligned}$$

Sea $y \in [a, b]$ tal que $y \wedge x = a$. Entonces

$$y \leq \neg_{[a)} x.$$

Como $y \leq b$, también vale que

$$y \leq \neg_{[a)} x \wedge b \leq (\neg_{[a)} x \wedge b) \vee a = u.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $u = \neg_{[a,b]}x$.

Veamos que $[a,b]$ es álgebra de Stone, es decir, se cumple

$$\neg_{[a,b]}\neg_{[a,b]}x \vee \neg_{[a,b]}x = \neg_{[a,b]}u \vee u = b.$$

Por lo visto anteriormente, $\neg_{[a,b]}u = (\neg_{[a)}u \wedge b) \vee a$. Luego, siendo que $\neg_{[a)}a = 1$ pues por hipótesis $[a)$ es álgebra de Stone, y que $(\neg_{[a)}b \wedge b) = a$ se sigue

$$\begin{aligned}
\neg_{[a,b]}u \vee u &= (\neg_{[a)}u \wedge b) \vee a \vee (\neg_{[a)}x \wedge b) \vee a \\
&= (\neg_{[a)}((\neg_{[a)}x \wedge b) \vee a) \wedge b) \vee (\neg_{[a)}x \wedge b) \vee a \\
&= (\neg_{[a)}(\neg_{[a)}x \wedge b) \wedge \neg_{[a)}a \wedge b) \vee (\neg_{[a)}x \wedge b) \vee a \\
&= ((\neg_{[a)}\neg_{[a)}x \vee \neg_{[a)}b) \wedge b) \vee (\neg_{[a)}x \wedge b) \vee a \\
&= ((\neg_{[a)}\neg_{[a)}x \wedge b) \vee (\neg_{[a)}b \wedge b)) \vee (\neg_{[a)}x \wedge b) \vee a \\
&= (\neg_{[a)}\neg_{[a)}x \wedge b) \vee (\neg_{[a)}x \wedge b) \vee a \\
&= ((\neg_{[a)}\neg_{[a)}x \vee \neg_{[a)}x) \wedge b) \vee a \\
&= (1 \wedge b) \vee a = b.
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.4. *Sea L una álgebra de Stone. Entonces L es un álgebra de Stone relativa si y sólo si $D(L)$ es un álgebra de Stone relativa.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que L es un álgebra de Stone relativa y sean a y b elementos densos tal que $a \neq 0$ y $a \leq b$. Para probar que $D(L)$ es un álgebra de Stone relativa bastará ver que $D(L)$ es conexo en L, y luego será un álgebra de Stone por hipótesis. Sean $a, b \in D(L)$ con $a \leq b$. Y sea $x \in L$ tal que

$$a \leq x \leq b.$$

Aplicando las identidades de la Proposición 3.1,

$$\neg b \leq \neg x \leq \neg a.$$

Como $a \in D(L)$, $\neg x \leq \neg a = 0$ y, por lo tanto, $x \in D(L)$.

$(\Leftarrow)$ Por el Teorema 4.3, será suficiente probar que $[y)$ es álgebra de Stone para todo $y \in L$. Sea $x \in [y)$. Consideramos x^a como el pseudocomplemento de $x \vee \neg y$ en $[y \vee \neg y)$, es decir, $x^a = \neg_{[y \vee \neg y)}(x \vee \neg y)$. Y consideremos también

$$x^b = x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y).$$

Veamos que se cumple $x^b \vee \neg y = x^a$ (1). En efecto, siendo que $y \leq x$, se sigue que $x^a \wedge \neg x \leq \neg x \leq \neg y$, y, además, por definición de x^a, se sigue $\neg y \leq y \vee \neg y \leq x^a$, entonces

$$\begin{aligned}
x^b \vee \neg y &= (x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y)) \vee \neg y \\
&= (x^a \wedge \neg x) \vee (x^a \wedge \neg\neg y) \vee \neg y \\
&= (x^a \wedge \neg\neg y) \vee \neg y \\
&= (x^a \vee \neg y) \wedge (\neg\neg y \vee \neg y) \\
&= (x^a \vee \neg y) \wedge 1 = x^a \vee \neg y \\
&= x^a \vee \neg y \\
&= x^a.
\end{aligned}$$

Veamos que $\neg_{[y)} x = x^b$. Primero, por su definición se deduce que $x^a, x^b \in [y)$. En efecto, por un lado $y \leq y \vee \neg y \leq x^a$, y teniendo en cuenta que $y \leq \neg\neg y$, entonces

$$y \leq \neg\neg y \leq \neg x \vee \neg\neg y.$$

Luego $y \leq x^b$. Ahora, siendo que $x \wedge \neg x = 0$, también $x \wedge x^a \wedge \neg x = 0$, y

$$\begin{aligned}
x \wedge x^b &= x \wedge x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y) \\
&= (x \wedge x^a \wedge \neg x) \vee (x \wedge x^a \wedge \neg\neg y) \\
&= x \wedge x^a \wedge \neg\neg y \\
&\leq (x \vee \neg y) \wedge x^a \wedge \neg\neg y \\
&= (y \vee \neg y) \wedge \neg\neg y \\
&= (y \wedge \neg\neg y) \vee (\neg y \wedge \neg\neg y) \\
&= y \vee 1 = y.
\end{aligned}$$

Entonces obtuvimos que $x \wedge x^b \leq y$ y, por otro lado, con las definiciones de x y x^b, tenemos

$$y \leq x \wedge x^b,$$

por lo que obtenemos lo deseado. Supongamos que existe un $u \in [y)$ tal que

$$x \wedge u = y.$$

Entonces

$$x \wedge u \wedge \neg y = y \wedge \neg y = 0.$$

Se sigue que $u \leq \neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y$. Por otro lado, como $y \leq u$ y $\neg y \leq \neg y$,

entonces
$$u \vee \neg y \in [y \vee \neg y),$$
y además
$$(u \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg y) = (u \wedge x) \vee \neg y = y \vee \neg y.$$
Entonces debe ser $u \vee \neg y \leq x^a$. Luego $u \leq u \vee \neg y \leq x^a$. Por lo tanto,
$$u \leq x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y) = x^b.$$

Veamos que se cumple
$$x^{bb} \vee x^b = 1,$$
en efecto, observemos que $x^{ba} = (x^b)^a$ es el pseudocomplemento de $x^b \vee \neg y$ en $[y \vee \neg y)$. Por la identidad (1), es el pseudocomplemento de x^a, y además al ser que$\neg x \leq \neg y \leq x^a$ entonces $x^a = x^a \vee \neg y$, y se tiene que $x^{ba} = x^{aa}$. Y dado que $\neg y \leq x^{aa}$ y también $\neg x \leq x^a$, tenemos

$$\begin{aligned}
x^{bb} \vee x^b &= (x^{ba} \wedge (\neg x^b \vee \neg\neg y)) \vee (x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y))\\
&= (x^{aa} \wedge (\neg(x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y)) \vee \neg\neg y)) \vee (x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y))\\
&= (x^{aa} \wedge (\neg x^a \vee \neg(\neg x \vee \neg\neg y)) \vee \neg\neg y)) \vee (x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y))\\
&= (x^{aa} \wedge (\neg x^a \vee (\neg\neg x \wedge \neg y) \vee \neg\neg y) \vee (x^a \wedge (\neg x \vee \neg\neg y))\\
&= (x^{aa} \wedge \neg x^a) \vee (x^{aa} \wedge \neg\neg x \wedge \neg y) \vee (x^{aa} \wedge \neg\neg y) \vee (x^a \wedge \neg x) \vee (x^a \wedge \neg\neg y)\\
&= (x^{aa} \wedge \neg x^a) \vee (x^{aa} \wedge \neg\neg x \wedge \neg y) \vee (x^a \wedge \neg x) \vee ((x^{aa} \vee x^a) \wedge \neg\neg y)\\
&= (x^{aa} \wedge \neg x^a) \vee (x^{aa} \wedge \neg\neg x \wedge \neg y) \vee (x^a \wedge \neg x) \vee \neg\neg y\\
&= (x^{aa} \wedge \neg x^a) \vee (\neg\neg x \wedge \neg y) \vee (x^a \wedge \neg x) \vee \neg\neg y\\
&\geq (\neg\neg x \wedge \neg y) \vee (x^a \wedge \neg x) \vee \neg\neg y\\
&= ((\neg\neg x \vee \neg\neg y) \wedge (\neg y \vee \neg\neg y)) \vee (x^a \wedge \neg x)\\
&= \neg\neg x \vee \neg\neg y \vee (x^a \wedge \neg x)\\
&\geq \neg\neg x \vee (x^a \wedge \neg x)\\
&= \neg\neg x \vee \neg x = 1.
\end{aligned}$$

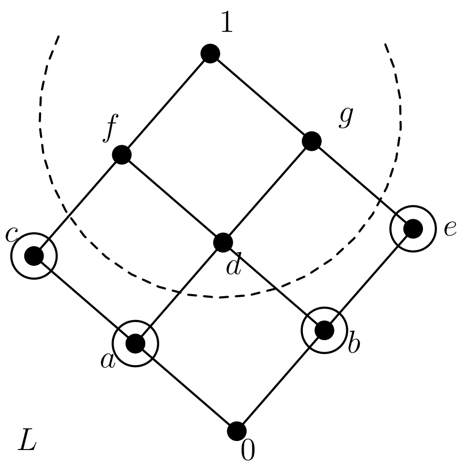
por lo tanto, hemos obtenido que $\neg_{[y)}\neg_{[y)}x \vee \neg_{[y)}x = 1.$ ■

Ejemplo 4.14. Observemos cómo se aplica en el Ejemplo 4.12,
$$\neg a = b\,,\, \neg b = a\,,\, \neg c = e\,,\, \neg e = c\,,\, \neg 0 = 1\,,\, \neg d = \neg f = \neg g = 0,$$

entonces el conjunto de los elementos densos queda simplemente formado por:

$$D(L) = \{d, f, g, 1\},$$

y se puede ver que es un álgebra de Stone.



4.3. Dualidad

Como hemos visto, en el capítulo anterior, en esta sección desarrollamos la dualidad para las álgebras de Stone. Basados en la dualidad para álgebras pseudocomplementadas, profundizaremos para las álgebras de Stone. Lo que nos lleva a preguntarnos cómo la identidad de Stone se puede traducir también en los siguientes términos del espacio dual. Probaremos que las álgebras de Stone cumplen que $(U]$ es abierto y decreciente, y es una condición necesaria y suficientemente.

Teorema 4.5. *Sea L un álgebra de Stone. Entonces para todo $U \in D(X(L))$ se tiene que*

$$\neg_{R_\neg} \neg_{R_\neg} U = (U].$$

Demostración. Sea $U \in D(X(L))$, por el Teorema de Representación 2.15, existe un elemento $a \in L$ tal que $U = \sigma(a)$ y con ello bastará ver que

$$\sigma(\neg\neg a) = (\sigma(a)].$$

($\subseteq$) Sea $P \in \sigma(\neg\neg a)$, es decir, $\neg\neg a \in P$. Observemos que si $\neg a \in P$, entonces por ser P filtro $\neg a \wedge \neg\neg a = 0 \in P$. Luego P no es propio. Por lo tanto, $\neg a \notin P$. Por el Lema 2.4, existe $Q \in X(L)$ tal que $a \in Q$ y $(P, Q) \in R_{\neg}$. Por el Lema 3.18, que existe un filtro primo Z tal que

$$P \subseteq Z \text{ y } Q \subseteq Z.$$

Entonces, como $P \subseteq Z$ y $a \in Q \subseteq Z$, tenemos que $P \in (\sigma(a)]$.

($\supseteq$) Sea $P \in (\sigma(a)]$. Queremos probar que $\neg\neg a \in P$. Vamos a suponer que $\neg\neg a \notin P$, entonces, por el Lema 2.4, existe un filtro $Q \in X(L)$ tal que $\neg a \in Q$ y $(P, Q) \in R_{\neg}$. Aplicando el Lema 3.18, existe un filtro $Z \in X(L)$ tal que

$$P \subseteq Z \text{ y } Q \subseteq Z.$$

Por otra parte, por hipótesis, existe un filtro primo W tal que $P \subseteq W$ y $a \in W$. Como L es un álgebra de Stone, por el Teorema 4.1, existe un único filtro maximal F que contiene a W. Así, $P \subseteq F$. Siendo que $P \subseteq Z$, por maximalidad de F, debe ser $Z \subseteq F$. Luego

$$\neg a \in Q \subseteq Z \subseteq F \text{ y } a \in W \subseteq F.$$

Y por ser F filtro, $a \wedge \neg a \in F$, y entonces $a \wedge \neg a = 0 \in F$ y contradice el hecho que F es propio. ■

Teorema 4.6. *Sea $\langle X, \leq, \tau\rangle$ un espacio de Priestley y además $D(X)$ es una p-álgebra. Si para todo $U \in D(X)$, $(U]$ es abierto y creciente entonces $D(X)$ es un retículo de Stone.*

Demostración. Siendo $D(X)$ una p-álgebra definimos la negación en el espacio $D(X)$ como

$$\neg U = (U]^c,$$

para todo $U \in D(X)$. Como en el caso de las p-álgebras, la negación está bien definida. Queremos probar que para cada $U \in D(X)$,

$$\neg\neg U \cup \neg U = X,$$

es decir,

$$((U]^c]^c \cup (U]^c = X.$$

Por unicidad del complemento de conjuntos,

$$((U]^c]^c = (U]$$

Por lo tanto, veamos que efectivamente se cumple dicha igualdad.

($\subseteq$) Queremos ver que
$$((U]^c]^c \subseteq (U].$$

Y, por propiedad de complemento, es equivalente a probar que

$$(U]^c \subseteq ((U]^c].$$

Esta inclusión es inmediata.

($\supseteq$) Ahora queremos probar que

$$(U] \subseteq ((U]^c]^c.$$

Sea $x \in (U]$. Supongamos que $x \in ((U]^c]$. Entonces existe un elemento $y \in (U]^c$ tal que $x \leq y$. Así tenemos que $y \notin (U]$, es decir, para todo elemento $z \in U$ tal que $y \leq z$, tenemos que
$$z \notin U.$$

Sin embargo observemos que por transitividad,

$$x \leq z.$$

Luego $x \notin (U]$, contradiciendo la hipótesis. ■

Corolario 4.7. *Sea L un retículo pseudocomplementado. Entonces L es un retículo de Stone si y sólo si para todo $U \in D(X(L))$ se cumple que $(U]$ es un abierto creciente.*

Bibliografía

[1] Alexander V. Chagrov, Michael Zakharyaschev, *Modal logic*, Oxford logic guides 35, Oxford University Press (1997).

[2] Balbes R., Dwinger P., *Distributive Lattices*. University of Missourri Press (1974).

[3] Birkhoff G.: *Lattice theory,* 1st ed. Providence, R.I. American Mathematical Society (1940).

[4] Blyth T.S., *Lattices and Ordered Algebraic Structures*. Springer Science & Business Media (2006).

[5] Burris S, Sankappanavar H. P., *A course in Universal Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, Srpinger, (1981).

[6] Celani, S. A.: *A semantic analysis of some distributive logics with negation,* Reports on Mathematical Logic 48 (2013), 79 – 98. ISSN print: 0137-2904.

[7] Celani, S. A.: *Distributive lattices with a negation operator*, Mathematical Logic Quarterly, (1999), 45, 207-218.

[8] Celani, S. A.: *Representation for some algebras with a negation operator*, Contributions to Discrete Mathematics 2, (2007), 205-213.

[9] Cignoli, R., Lafalce, S., and Petrovich, A.: *Remarks on Priestley duality for distributive lattices*. Order 8 (3), (1991), 299–315.

[10] Grätzer G., *General Lattice Theory*, Second edition, Publisher: Birkhäuser Verlag, Basel, (1998).

[11] Lee K. B.: *Equational classes of distributive pseudo-complemented lattices*. Canad. J. Math. 22:881-891, (1970).

[12] Stone M. H.: *The Theory of Representations of Boolean Algebras*. Transactions of the American Mathematical Society 40: 37-111.