Propuestas de Trabajo Final - Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Director: Dr. Manuel A. Aguirre

Co-Director: Mg. Emilio Aguirre-Rébora

Área: Métodos Numéricos Aplicados a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

Tema 1: Comparación de diferentes métodos numéricos para el filtrado anisótropico de la ecuación de difusión siguiendo el modelo de Perona-Malik

Tema 2: Comparación de diferentes métodos numéricos para el filtrado anisótropico de una generalización de la ecuación de difusión [9]

1. Introducción

Los filtros de difusión no lineales se han aplicado en el post-procesamiento de datos fluctuantes [17, 28], para optimizar la calidad de texturas tales como las huellas dactilares. Además, son útiles para mejorar el submuestreo [10] y la detección de líneas [12, 29], para la restauración de *blind image* [36], para los algoritmos de segmentación basados en la representación espacio-escala [20, 21], para la segmentación de texturas [33, 34] y los datos de detección remota [1, 2], y para el seguimiento de objetivos en las imágenes de infrarrojos [4]. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones se refieren al filtrado de imágenes médicas [2,3,11,14–16,18,21,22,24–26,31,32,34,35]. En particular, se habla de técnicas de filtrado en la difusión cuando las operaciones de limpieza de ruido, suavizado y realce de bordes se modelan como un proceso de difusión entre celdas adyacentes, de manera que con el paso del tiempo las zonas similares se vuelven más homogéneas y los bordes se realzan; si la difusión de la que se habla es isótropica entonces se produce por igual en todas las direcciones; si por el contrario, se habla de anisótropica entonces la difusión variará según la dirección.

Perona y Malik, en [23], presentan un modelo basado en la ecuación de difusión para el filtrado de imágenes:

$$
\begin{aligned}
u_t(\mathbf{x},t) &= \mathrm{Div}_{\mathbf{x}}\left(c\left(\|\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t)\|^2\right)\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t)\right); \quad \mathbf{x}\in\Omega, t\in[0,T] && (1)\\
u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x}\in\Omega && (2)\\
d\nabla_{\mathbf{x}}u\cdot\nu &= 0; \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega && (3)
\end{aligned}
$$

Los operadores $\mathrm{Div}_{\mathbf{x}}$ y $\nabla_{\mathbf{x}}$ denota el gradiente y la divergencia en $\mathbf{x}$; ν denotan el vector normal exterior; $\mathbf{x}=(x,y)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$; las función c es el coeficiente de difusión, $u_0(\mathbf{x})$ es la intensidad de la imagen y $u(\mathbf{x},t)$ es la evolución de la imagen en el tiempo. Por las condiciones que debe cumplir c Perona y Malik, en [23], recomiendan el uso de los coeficientes de difusión siguientes:

$$
\begin{aligned}
c_1\left(\|\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t)\|^2\right) &= \exp\left(-\frac{\|\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t)\|^2}{K^2}\right) && (4)\\
c_2\left(\|\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t)\|^2\right) &= \frac{1}{1+\frac{\|\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t)\|^2}{K^2}} && (5)
\end{aligned}
$$

donde el valor del parámetro K va a depender de cuál sea la aplicación concreta, se elige según el nivel de ruido y la intensidad de los bordes existentes, se puede estimar entre $1.5\sigma_{\text{noise}} < K < 2\sigma_{\text{noise}}$ ó puede calcularse de alguna manera en cada iteración, en ese caso K es variable [11].

La implementación de métodos numéricos aplicados al modelo (1-3) comienza con Gerig, Kübler, Kikinis y Jolesz, en [11], donde plantean una formulación discreta más sencilla trabajando con pixeles vecinos, una estimación del parámetro K y una cota superior para el paso temporal que mantiene la estabilidad; posteriormente, Catté, Lions, Morel y Coll, en [7], bajo varias críticas al modelo de Perona-Malik plantean una estimación del gradiente de u que en la práctica se reemplaza por el conocido filtrado pasobajo realizado por un kernel gaussiano lo que les permite obtener un esquema semidiscreto iterativo que converge a la solución; luego, Weickert, ter Haar Romeny y Viergever, en [30], a partir de la ecuación dada en [7] proponen un esquema pseudo implícito que da lugar a un esquema implícito donde no hay reestricciones sobre el paso temporal para que el esquema sea estable aunque el cálculo del mismo es muy costoso. Al hacer un salto más cercano a nuestra época Cuesta y Finat, en [9], proponen una generalización de la ecuación de difusión

$$
\begin{aligned}
\partial_t^{\alpha}u(\mathbf{x},t) &= \Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t) \quad \mathbf{x}\in\Omega, t\in[0,T] && (6)\\
u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x}\in\Omega && (7)\\
\partial_t u(\mathbf{x},0) &= 0 \quad \mathbf{x}\in\Omega && (8)\\
d\nabla_{\mathbf{x}}u\cdot\nu &= 0; \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega && (9)
\end{aligned}
$$

donde ∂_t^α es la derivada fraccional en tiempo de orden $1 < \alpha < 2$ en el sentido de Riemmann-Liouville. A partir de (6-9) se implementa un filtrado de imagen por el promedio de cálculo fraccional; Cuesta, Kirame y Malik, en [8], proponen un modelo dentro del mismo marco del cálculo fraccional (derivadas e integrales) lo que les permite manejar la difusión mediante un parámetro de viscosidad en lugar de usar coeficientes no lineales como Perona-Malik.

Se ha realizado una descripción, de manera general, de los trabajos más destacados sobre la extensa bibliografía existente de donde emerge un campo de posibilidades para contribuir en la comparación de los métodos numéricos disponibles, analizando exhaustibamente sus cualidades (medidas de rapidez de cálculo, tiempo de cómputo, prestaciones de dichos métodos al estimar el ruido sin dañar la imagen: medida de calidad peak signal-to-noise ratio)

2. Objetivo

Tema 1: Realizar una comparación exhaustiva del modelo (1-3) basados en diferentes métodos numéricos, por ejemplo: esquemas en diferencias finitas (θ-métodos), método del elemento finito (dominio de referencia triángular ó cuadrangular), método pseudo-espectrales, etc. [5, 6, 13, 19, 27].

Tema 2: Realizar una comparación exhaustiva del modelo (6-9) basados en diferentes métodos numéricos, por ejemplo: esquemas en diferencias finitas (θ-métodos), método del elemento finito (dominio de referencia triángular ó cuadrangular), método pseudo-espectrales, camino aleatorio, etc. [5, 6, 13, 19, 27].

3. Metodología

En primer lugar, se pretende contaminar las imágenes con ruido, por ejemplo: gaussiano. Comparar estos esquemas y métodos con medidas de rapidez de cálculo, tiempo de cómputo y las prestaciones de los mismos al estimar el ruido sin dañar la imagen usando como medida de calidad $PSNR$ (peak signal-to-noise radio):

$$PSNR = 20 \times 10 \times \log_{10}\left(\frac{P_s}{RMSE}\right) \tag{10}$$

donde $RMSE$ (root mean squared error) se define, mediante

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (I_{j,i} - U_{j,i})^2}{JL}} \tag{11}$$

con $I_{j,i}$ el valor del pixel en la posición (j, i) de la imagen original y $U_{j,i}$ el valor del pixel en la posición (j, i) de la imagen filtrada. Posteriormente, la metodología es en general la típica del análisis de métodos numéricos para ecuaciones en derivadas parciales. Se parte de la propuesta de discretización del problema de interés y se analizan las condiciones del método a utilizar. Se aborda un estudio numérico de los esquemas con vistas a confirmar los resultados teóricos. La experimentación numérica tiene en cuenta la comparación con otros esquemas ya propuestos en la literatura.

4. Planificación

Una vez seleccionado el tema la planificación se organiza proporcionando la literatura correspondiente del tema indicando los algoritmos esenciales que se implentarán en MatLab o SciLab y, si fuera preciso en otros lenguajes de alto nivel, para el desarrollo del trabajo.

Referencias

[1] Acton, S., Bovik, A., and Crawford, M. Anisotropic diffusion pyramids for image segmentation. *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing 3* (1994), 487–482.

[2] Acton, S., and Crawford, M. A mean field solution to anisotropic edge detection of remotely sensed data. *Proc. 12th Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium 2* (1992), 845–847.

[3] Bajla, I., and Holländer, I. Geometry-driven diffusion smoothing of the mr brain images using a novel variable conductance. *Proc. 18th Annual Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Soc.* (1996).

[4] Burton, M., and Acton, S. Target tracking using the anisotropic diffusion pyramid. *Proc. IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpetation* (1996).

[5] Canuto, C., Quarteroni, A., Hussaini, M., and Zang, T. A. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains.* Springer, 2006.

[6] Canuto, C., Quarteroni, A., Hussaini, M., and Zang, T. A. *Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics.* Springer, 2007.

[7] Catté, F., Lions, P., Morel, J., and Coll, T. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal. 29* (1992), 182–193.

[8] Cuesta, E., and M. Kirane, S. M. Image structure preserving denoising using generalized fractional time integrals. *Signal Processing 92* (2011), 553–563.

[9] E.Cuesta, and J.Finat. Image processing by means of a linear integro-differential equation. *in:IASTED* (2003), 438–442.

[10] Ford, G., Estes, R., and Chen, H. Scale-space analysis for image sampling and interpolation. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing 3* (1992), 165–168.

[11] Gerig, G., Kübler, O., Kikinis, R., and Jolesz, F. Nonlinear anisotropic filtering of mri data. *IEEE Trans. Medical Imaging 11* (1992), 221–232.

[12] Gerig, G., and Székely, G. Finding line structures by multi-valued nonlinear diffusion of feature maps. *Report, Communication Technology Laboratory, Image Science Division, ETH–Zentrum* (1993).

[13] Hughes, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987.

[14] Krissian, K., Malandain, G., and Ayache, N. Directional anisotropic diffusion applied to segmentation of vessels in 3d images. *Scale-space theory in computer vision - Lecture Notes in Computer Science, 1252* (1997), 345–348.

[15] Lamberti, C., Sitta, M., and Sgallari, F. Improvements to the anisotropic diffusion model for 2-d echo image processing. *Proc. Annual Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society 14* (1992), 1872–1873.

[16] Loew, M., Rosenman, J., and Chen, J. A clinical tool for enhancement of portal images. *Image processing - SPIE 2167* (1994), 543–550.

[17] Lukschin, A., Neunzert, H., and Struckmeier, J. Interim report of the project dph 6473/91 - coupling of navier-stokes and boltzmann regions. *Internal Report, Laboratory of Technomathematics, Kaiserslautern* (1993).

[18] Luo, D.-S., King, M., and Glick, S. Local geometry variable conductance diffusion for postreconstruction filtering. *IEEE Trans. Nuclear Sci. 41* (1994), 2800–2806.

[19] Morton, K., and Mayers, D. F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*, 2 ed. Cambridge press, 2005.

[20] Niessen, W., Vincken, K., Weickert, J., and Viergever, M. Nonlinear multiscale representations for image segmentation. *Computer Vision and Image Understanding 66* (1997), 233–245.

[21] Niessen, W., Vincken, K., Weickert, J., and Viergever, M. Three-dimensional mr brain segmentation. *Proc. Sixth Int. Conf. on Computer Vision* (1998).

[22] Ottenberg, K. *Model-based extraction of geometric structure from digital images.* PhD thesis, Utrecht University, 1993.

[23] Perona, P., and Malik, J. Scale-space and edge detection using anisotropic. *IEEE Trans. on Pattern Anal. machine Intell. 12*, 7 (1990), 629–639.

[24] Sánchez–Ortiz, G., Rueckert, D., and Burger, P. Knowledge-based anisotropic diffusion of vector-valued 4-dimensional cardiac mr images. *Seventh British Machine Vision Conference* (1996).

[25] Sijbers, J., Scheunders, P., Verhoye, M., der Linden, A. V., Dyck, D. V., and Raman, E. Watershed-based segmentation of 3d mr data for volume quantization. *Magnetic Resonance Imaging 15* (1997), 679–688.

[26] Steen, E., and Olstad, B. Scale-space and boundary detection in ultrasonic imaging using nonlinear signal-adaptive anisotropic diffusion. *Image processing 2167* (1994), 116–127.

[27] Strikwerda, J. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation.* Chapman & Hall/CRC, 1989.

[28] Weickert, J. Theoretical foundations of anisotropic diffusion in image processing. *Computing 11* (1985), 221–236.

[29] Weickert, J. Multiscale texture enhancement. *Computer analysis of images and patterns, Lecture Notes in Computer Science 970* (1995), 230–237.

[30] Weickert, J., ter Haar Romeny, B., and Viergever, M. Efficiente and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE Transactions on Image Processing 7*, 3 (1998), 398–410.

[31] Weickert, J., Zuiderveld, K., ter Haar Romeny, B., and Niessen, W. Parallel implementations of aos schemes: A fast way of nonlinear diffusion filtering. *Proc. 1997 IEEE International Conference on Image Processing* (1997).

[32] Whitaker, R. Characterizing first and second-order patches using geometry-limited diffusion. *Information processing in medical imaging - Lecture Notes in Computer Science 687* (1993), 149–167.

[33] Whitaker, R. Geometry limited diffusion in the characterization of geometric patches in images. *CVGIP: Image Understanding 57* (1993), 111–120.

[34] Whitaker, R., and Gerig, G. Vector-valued diffusion. *Geometry driven diffusion in computer vision* (1994), 93–134.

[35] Yoo, T., and Coggins, J. Using statistical pattern recognition techniques to control variable conductance diffusion. *Information processing in medical imaging, Lecture Notes in Computer Science* (1993), 459–471.

[36] You, Y.-L., and Kaveh, M. Anisotropic blind image restoration. *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing 2* (1996), 461–464.